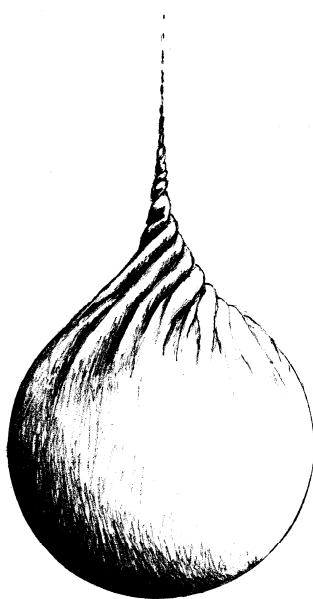


SPINORY



SŁAWOMIR BRZEZOWSKI
Instytut Fizyki UJ

Poniższe opracowanie jest konspektem semestralnego wykładu, który przygotowałem kiedyś dla czwartego roku fizyki spec. optyki atomowej. Zamieszczone w tekście zadania posłużyły jako materiał dla ćwiczeń do tego wykładu.

Od czytelnika oczekuje się znajomości podstaw algebry liniowej i mechaniki kwantowej.

Tekst jest poprawioną i uzupełnioną wersją mojego skryptu wydanego przez Uniwersytet Jagielloński w roku 1995, którego nakład jest już od dawna wyczerpany. Recenzentem tego skryptu był prof. dr hab. Edward Kapuścik.

Autorem rysunku na stronie tytułowej jest Radek Brzezowski.

Spis treści

Grupa $SL(2,C)$	5
Równanie Diraka.....	18
Równanie Diraka w mechanice kwantowej.....	23
Równanie Diraka dla cząstki naładowanej w polu elektro- magnetycznym.....	25
Równanie Diraka jako równanie ewolucji w czasie.....	28
Reprezentacja standardowa równania Diraka.....	29
Zupełny układ rozwiązań równania Diraka dla cząstki swo- bodnej. Normalizacja.....	32
Współmienniczność równania Diraka względem transformacji Lorentza.....	39
Skrętność.....	42
Reprezentacja Foldy—Wouthuysena.....	47
Granica nierelatywistyczna równania Diraka dla cząstki w polu elektromagnetycznym. Anomalny moment magnetyczny elektronu.....	51
Równanie Diraka dla cząstki w polu elektrostatycznym o symetrii sferycznej; atom wodoru.....	55
Reprezentacje grupy obrotów.....	71
Dodatek 1. Współrzędne kontrawariantne i kowariantne w przestrzeni czterowektorów	87
Dodatek 2. Składanie momentów pędu.....	95

1

GRUPA $SL(2, \mathbb{C})$

Niektóre używane przez fizyków grupy symetrii (takie, jak np. grupa obrotów czy grupa Lorentza) rodzą się w ten sposób, że mamy jakąś przestrzeń wektorową (odpowiednio: trójwymiarową przestrzeń rzeczywistą lub czterowymiarową czasoprzestrzeń), w tej przestrzeni wybieramy bazę służącą do opisu wektorów za pomocą ciągów liczb, a następnie rozważamy inne bazy, które okazują się równoważne tej pierwszej w sensie fizycznym. Tak się składa, że przekształcenia prowadzące od baz wyjściowych do tych innych baz tworzą grupy względem składania przekształceń. Pojęcie grupy funkcjonuje więc na dwóch poziomach

— na poziomie operatorów realizujących przekształcenia w przestrzeni wektorowej (po wyborze bazy — na poziomie macierzy),

— na poziomie abstrakcyjnym, gdzie grupa jest zbiorem elementów z określoną "tabliczką mnożenia".

Ten drugi poziom wypadłoby w zasadzie uznać za pierwotny, niemniej jednak w praktyce kolejność bywa odwrotna: "odkrywamy" grupę budując od razu jej konkretną realizację w postaci zbioru przekształceń w przestrzeni wektorowej. Przy tej samej okazji grupa dostaje nazwę: na przykład grupą $O(3)$ nazywamy grupę izomorficzną z grupą macierzy ortogonalnych 3×3 przedstawiających sztywne obroty w rzeczywistej 3-wymiarowej przestrzeni wektorowej.

Podobnie wprowadzimy grupę $SL(2, \mathbb{C})$, ściśle związaną — jak się okaże — z grupą Lorentza. Grupa Lorentza "urodziła się" przy okazji opisu transformowania się czasoprzestrzennych współrzędnych zdarzeń punktowych w czterowymiarowej czasoprzestrzeni wraz ze zmianą inercjalnego układu odniesienia. Okazało się jednak, że baza złożona z czterewektorów nie jest najbardziej pierwotną bazą do opisu obiektów fizycznych. Są bowiem obiekty (spinory właśnie), których nie da się wyrazić jako kombinacji liniowych czterewektorów bazowych — do ich opisu trzeba wprowadzić "drobniejszą monetę" niż czterewektory. Przestrzeń tych bardziej pierwotnych obiektów (bardziej pierwotnych w takim sensie, w jakim zwykły 3-wektor jest pierwotny w stosunku do — przykładowo — tensora bezwładności) okaże się przestrzenią 2-wymiarową nad ciałem liczb zespolonych. (Określenie "przestrzeń wektorowa nad ciałem" oznacza, że do tworzenia kombinacji liniowych wektorów w tej przestrzeni używa się współczynników będących elementami tego ciała liczbowego. Warto pamiętać, że z matematycznego punktu widzenia struktura przestrzeni wektorowej jest określona w zupełności przez podanie wymiaru przestrzeni i ciała liczbowego.)

Załóżmy więc, że mamy taką dwuwymiarową przestrzeń zespoloną, i nazwijmy ją przestrzenią S spinorów. Brzmienie nazwy "spinory" kojarzy się nam ze spinem cząstki, chociaż na razie nic jeszcze takiego skojarzenia nie uzasadnia. W przestrzeni S wybierzmy dwa liniowo niezależne wektory (spinory) $|\alpha_1\rangle$ i $|\alpha_2\rangle$, które potraktujemy jako bazowe. Dla dowolnego spinora $|\xi\rangle$ mamy więc

$$|\xi\rangle = \xi^1 |\alpha_1\rangle + \xi^2 |\alpha_2\rangle \equiv \xi^k |\alpha_k\rangle \in S.$$

Liczby ξ^k są składowymi spinora $|\xi\rangle$ w bazie $\{|\alpha_k\rangle\}$.

Rozważmy grupę transformacji liniowych w S realizowanych zespolonymi macierzami 2×2 o wyznaczniku równym 1 (łatwo sprawdzić, że to istotnie jest grupa). Na razie przekształcenia tej grupy będziemy rozumieć biernie: realizacja przekształceń polega na takiej zmianie bazy, aby zaowocowało to przekształceniami współrzędnych ξ^k

$$\xi^{k'} = U_l^{k'} \xi^l,$$

gdzie $\det U = 1$.

Tak określona grupa macierzy jest z definicji izomorficzna z grupą $SL(2, \mathbb{C})$ i stanowi jej reprezentację w S .

Zafundujmy sobie drugą przestrzeń taką, jak S — nazwijmy ją \dot{S} i w niej wybierzmy kopię bazy z przestrzeni S , czyli dwa spinory $|\alpha_1\rangle$ i $|\alpha_2\rangle$. Zażądajmy, aby każdej zmianie bazy w przestrzeni S realizującej jakieś przekształcenie z grupy $SL(2,C)$ towarzyszyło przekształcenie bazy w \dot{S} realizowane macierzą \bar{U} (sprzężoną do U). Odpowiednia reguła przekształcania współrzędnych spinorów w przestrzeni \dot{S} jest więc następująca:

$$\xi^{k'} = \bar{U}_i^{k'} \xi^i, \quad \text{gdzie} \quad \bar{U}_i^{k'} = \overline{(U_i^{k'})}.$$

Wstawka

ILOCZYN TENSOROWY DWÓCH PRZESTRZENI WEKTOROWYCH

Będzie nam teraz potrzebne pojęcie iloczynu tensorowego przestrzeni wektorowych. Oto definicja.

Rozważmy dwie przestrzenie wektorowe A i B nad wspólnym ciałem liczbowym

Wektory z przestrzeni A oznaczmy $|a_1\rangle, |a_2\rangle, |a_3\rangle, \dots$, wektory z przestrzeni B oznaczamy $|b_1\rangle, |b_2\rangle, |b_3\rangle, \dots$

Iloczynem tensorowym $A \otimes B$ obydwu przestrzeni nazywamy zbiór wszystkich możliwych par $|a\rangle \otimes |b\rangle$ oraz ich kombinacji liniowych, przy czym:

1. $(|a_1\rangle + |a_2\rangle) \otimes |b\rangle = |a_1\rangle \otimes |b\rangle + |a_2\rangle \otimes |b\rangle,$
2. $|a\rangle \otimes (|b_1\rangle + |b_2\rangle) = |a\rangle \otimes |b_1\rangle + |a\rangle \otimes |b_2\rangle,$
3. $(\lambda|a\rangle) \otimes |b\rangle + |a\rangle \otimes (\lambda|b\rangle) \equiv \lambda(|a\rangle \otimes |b\rangle),$

gdzie λ jest elementem ciała.

UWAGA: Nie każdy wektor z przestrzeni $A \otimes B$ jest postaci $|a\rangle \otimes |b\rangle$. Na przykład wektor $|a_1\rangle \otimes |b_1\rangle + |a_2\rangle \otimes |b_2\rangle$ nie da się na ogół zapisać w postaci pojedynczego iloczynu $|a\rangle \otimes |b\rangle$.

Jeżeli wektory $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, |\alpha_3\rangle, \dots, |\alpha_n\rangle$ stanowią bazę w przestrzeni A a wektory $|\beta_1\rangle, |\beta_2\rangle, |\beta_3\rangle, \dots, |\beta_m\rangle$ bazę w przestrzeni B , to wektory $|\alpha_k\rangle \otimes |\beta_j\rangle$ (dla wszystkich możliwych par wskaźników) stanowią bazę w przestrzeni $A \otimes B$. Wynika z tego między innymi, że wymiar iloczynu tensorowego przestrzeni n -wymiarowej przez przestrzeń m -wymiarową wynosi $n \times m$.

Utwórzmy teraz iloczyn tensorowy $S \otimes \dot{S}$. Mamy czterowymiarową (dwa razy dwa) zespoloną przestrzeń wektorową. Elementami tej przestrzeni są wszelkie możliwe zespolone kombinacje liniowe wektorów $|\alpha_s\rangle \otimes |\alpha_r\rangle$ pełniących rolę bazy w $S \otimes \dot{S}$:

$$|t\rangle = t^{sj} |\alpha_s\rangle \otimes |\alpha_r\rangle \in S \otimes \dot{S}.$$

W przestrzeni $S \otimes \dot{S}$ powstaje więc w naturalny sposób reprezentacja grupy $SL(2,C)$

$$t^{r's'} = U_r^{r'} \overline{U_s^{s'}} t^{rs}.$$

Wyodrębnijmy w przestrzeni $S \otimes \dot{S}$ podzbiór składający się z tensorów reprezentowanych w bazie $\{|\alpha_s\rangle \otimes |\alpha_r\rangle\}$ macierzami hermitowskimi t i zauważmy, że stanowi on czterowymiarową przestrzeń wektorową M nad ciałem liczb rzeczywistych. Istotnie, każda rzeczywista kombinacja liniowa macierzy hermitowskich jest macierzą hermitowską. Zauważmy dalej, że grupa $SL(2, \mathbb{C})$ działa wewnątrz wybranego podzbioru, czyli że mamy reprezentację grupy $SL(2, \mathbb{C})$ w przestrzeni tensorów hermitowskich.

Warto zauważyć, że komplet czterech wektorów (tensorów) $\{|\alpha_s\rangle \otimes |\alpha_r\rangle\}$ nie nadaje się na bazę w tej przestrzeni, bo co prawda wektory $|\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_i\rangle$ oraz $|\alpha_2\rangle \otimes |\alpha_2\rangle$ należą do tej przestrzeni, ale pozostałe dwa już nie.

Pokażemy teraz, że jeżeli odpowiednio utożsamić przestrzeń M ze zwykłą relatywistyczną przestrzenią czterowektorów (liczba wymiarów i ciało liczbowe są te same), to grupa $SL(2, \mathbb{C})$ okazuje się ściśle związana z grupą Lorentza.

W tym celu w przestrzeni tensorów hermitowskich wybieramy następujące cztery liniowo niezależne tensory w roli tensorów bazowych (można sprawdzić, że wszystkie cztery zawierają się w przestrzeni tensorów hermitowskich, że są liniowo niezależne i że stanowią bazę zupełną):

$$\begin{aligned} |\sigma_0\rangle &= |\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_i\rangle + |\alpha_2\rangle \otimes |\alpha_2\rangle, \\ |\sigma_1\rangle &= |\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle + |\alpha_2\rangle \otimes |\alpha_i\rangle, \\ |\sigma_2\rangle &= -i|\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle + i|\alpha_2\rangle \otimes |\alpha_i\rangle, \\ |\sigma_3\rangle &= |\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_i\rangle - |\alpha_2\rangle \otimes |\alpha_2\rangle. \end{aligned}$$

Macierze współrzędnych tych tensorów mają postać odpowiednio

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

i pokrywają się z macierzami Pauliego.

ZADANIE

Udowodnij, że trzy macierze Pauliego $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ spełniają związek $\sigma_k \sigma_l = \delta_{kl} I + i \sum_{m=1}^3 \epsilon_{klm} \sigma_m$ (znak sumowania zwykle się opuszcza.)

Dowolny tensor hermitowski możemy teraz zapisać jako kombinację liniową tensorów bazowych

$$|t\rangle = x^0 |\sigma_0\rangle + x^1 |\sigma_1\rangle + x^2 |\sigma_2\rangle + x^3 |\sigma_3\rangle$$

a macierz t^{rs} tensora $|t\rangle$ w bazie $\{|\alpha_s\rangle \otimes |\alpha_r\rangle\}$ może być zapisana w postaci

$$t^{rs} (=) \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu \sigma_\mu.$$

Zauważmy, że przekształcenia z grupy $SL(2, \mathbb{C})$ zachowują wyznacznik macierzy współrzędnych każdego tensora dwuwskaźnikowego z przestrzeni $S \otimes \bar{S}$:

$$\det(t^{r's'}) \equiv \det[Ut\bar{U}^T] = \det(t^{r\bar{s}})$$

a ten wyznacznik okazuje się zwykłym relatywistycznym niezmiennikiem czterowektora o współrzędnych x^μ

$$\det(t^{r\bar{s}}) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

Z powyższego wynika, że jeżeli przestrzeń M , wyjętą z przestrzeni tensorów $||t\rangle$, utożsamimy z przestrzenią czterowektorów, to cztery tensory bazowe $||\sigma_\mu\rangle$ pełnią rolę wersorów bazowych odpowiednio: czasowego (dla $\mu = 0$) i trzech przestrzennych ($\mu = 1, 2, 3$).

Sprawdźmy teraz, jakimi macierzami U i \bar{U} realizowane są podstawowe przekształcenia z grupy Lorentza.

ZADANIE

Sprawdź, jakim transformacjom Lorentza odpowiadają następujące macierze U :

a. $U = \begin{pmatrix} e^{-\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{\varphi/2} \end{pmatrix};$

W.: Transformację Lorentza

$$x^{0'} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(x^0 - \frac{v}{c} x^3 \right),$$

$$x^{3'} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(x^3 - \frac{v}{c} x^0 \right)$$

można zapisać w postaci

$$x^{0'} = x^0 \cosh \varphi - x^3 \sinh \varphi,$$

$$x^{3'} = -x^0 \sinh \varphi + x^3 \cosh \varphi.$$

b. $U = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix},$

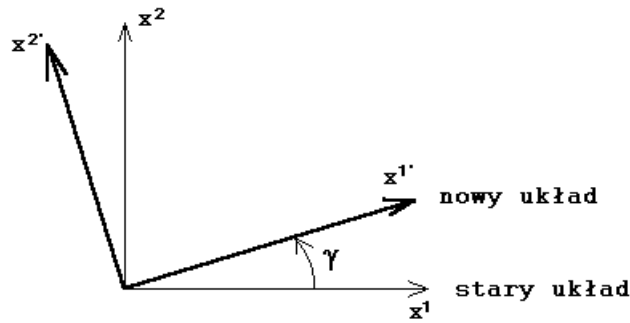
c. $U = \begin{pmatrix} \cos \beta/2 & \sin \beta/2 \\ -\sin \beta/2 & \cos \beta/2 \end{pmatrix},$

d. $U = \begin{pmatrix} \cos \alpha/2 & i \sin \alpha/2 \\ i \sin \alpha/2 & \cos \alpha/2 \end{pmatrix}.$

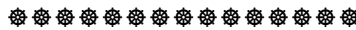
Pokaż, że macierze wymienione w punktach b, c i d są unitarne.

Rozwiązanie:

Macierz U wymieniona w punkcie "a" odpowiada transformacji Lorentza wzdłuż osi z -ów z prędkością v taką, że $\operatorname{tgh} \varphi \equiv \frac{\sinh \varphi}{\cosh \varphi} = v/c$ (nowy układ odniesienia porusza się z prędkością v w dodatnim kierunku starej osi z -ów). Unitarne macierze z punktów b, c i d to — odpowiednio — obroty o kąty γ , β i α wokół osi z -ów, y -ów i x -ów, przy czym układ odniesienia obracany jest w lewo, np. dla punktu b:



$$\begin{aligned} x^{1'} &= x^1 \cos \gamma + x^2 \sin \gamma \\ x^{2'} &= -x^1 \sin \gamma + x^2 \cos \gamma. \end{aligned}$$



W ten sposób pokazaliśmy, że każdą transformację Lorentza wykonywaną w przestrzeni czterowektorów można zrealizować odpowiednio składając transformacje z grupy $SL(2, \mathbb{C})$ wykonane w S i \dot{S} . Grupa $SL(2, \mathbb{C})$ nie jest jednak dokładnie równoważna grupie Lorentza. Bezpośrednio bowiem widać, że dane przekształcenie Lorentza może być realizowane dwoma przekształceniami z $SL(2, \mathbb{C})$: parą macierzy (U, \bar{U}) i równie dobrze parą macierzy $(-U, -\bar{U})$, które również mają wyznacznik równy $+1$. Mówimy, że grupa $SL(2, \mathbb{C})$ podwójnie nakrywa grupę Lorentza.

Poprzednie zadanie dotyczyło podstawowych transformacji Lorentza i sposobu ich realizacji na poziomie baz w przestrzeniach spinorów S i \dot{S} . Jak się okazało, transformacje Lorentza realizowane są odpowiednimi przekształceniami baz w przestrzeniach S i \dot{S} oddzielnie. Dla uzupełnienia podamy transformacje realizujące w przestrzeni Minkowskiego zwykłe przestrzenne odbicie P (czyli równoczesną zmianę zwrotu trzech bazowych wektorów przestrzennych) i odbicie czasowe T , polegające w wersji biernej na zmianie zwrotu wersora zerowego (czasowego). Warto sprawdzić, że te odbicia realizowane są transformacjami (możliwymi – jak się zaraz stanie jasne – tylko w przestrzeni $S \oplus \dot{S}$, z uwagi na mieszanie bazowych spinorów kropkowanych i niekropkowych):

- odbicie przestrzenne:

$$|\alpha_1\rangle \rightarrow -i|\alpha_2\rangle, \quad |\alpha_2\rangle \rightarrow i|\alpha_1\rangle, \quad |\dot{\alpha}_1\rangle \rightarrow i|\dot{\alpha}_2\rangle, \quad |\dot{\alpha}_2\rangle \rightarrow -i|\dot{\alpha}_1\rangle$$

(Strzałki zastępują sformułowanie „przechodzi w”, czyli na przykład w roli nowego spinora bazowego $|\alpha_1\rangle$ występuje po transformacji stary spinor $-i|\alpha_2\rangle$ itd.)

- odbicie czasowe:

$$|\alpha_1\rangle \rightarrow i|\alpha_2\rangle, \quad |\alpha_2\rangle \rightarrow -i|\alpha_1\rangle, \quad |\alpha_1\rangle \rightarrow i|\alpha_2\rangle, \quad |\alpha_2\rangle \rightarrow -i|\alpha_1\rangle.$$

ZADANIE

Ile parametrów rzeczywistych trzeba zadać, aby wybrać element grupy $SL(2,C)$? Porównaj z grupą Lorentza.

Wstawka:

GENERATORY GRUPY OBROTÓW

Wyprowadzimy teraz relacje komutacji spełniane przez generatory grupy obrotów. Relacje te okażą się podobne do występujących w mechanice kwantowej relacji komutacji obowiązujących dla operatorów orbitalnego momentu pędu, co z kolei pozwoli nam zinterpretować wprowadzone wyżej macierze Pauliego.

Grupa obrotów $O(3)$ "urodziła się" jako zbiór sztywnych obrotów układu odniesienia (wokół początku układu) w 3-wymiarowej rzeczywistej przestrzeni wektorowej.

Obrót jest zadany, jeżeli podamy oś obrotu i kąt obrotu. Zmierzając z kątem obrotu do zera, osiągamy transformację jednostkową — jedynekę grupową. Pierwsze dwa człony rozwinięcia

$$\hat{O}(\vec{n}, d\alpha) = \hat{1} + i\hat{J}_{\vec{n}}d\alpha + \dots$$

definiują generator $\hat{J}_{\vec{n}}$ obrotu wokół osi \vec{n} (czynnik "i" wyciągnięto dla przyszłej wygody). Można dowieść, że struktura grupy jest określona przez podanie relacji komutacji dla wszystkich niezależnych generatorów i że w naszym przypadku takim kompletem niezależnych generatorów są np. generatory obrotów wokół osi x , y i z : \hat{J}_x , \hat{J}_y oraz \hat{J}_z . Relacje komutacji spełniane przez te generatory podglądniemy w przestrzeni 3-wymiarowej, gdzie obroty reprezentowane są macierzami 3×3 .

Macierze obrotów wokół osi x , y i z o kąty — odpowiednio — $d\alpha$, $d\beta$ oraz $d\gamma$ mają postać:

$$O_x(d\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos d\alpha & \sin d\alpha \\ 0 & -\sin d\alpha & \cos d\alpha \end{pmatrix},$$

$$O_y(d\beta) = \begin{pmatrix} \cos d\beta & 0 & -\sin d\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin d\beta & 0 & \cos d\beta \end{pmatrix},$$

$$O_z(d\gamma) = \begin{pmatrix} \cos d\gamma & \sin d\gamma & 0 \\ -\sin d\gamma & \cos d\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

co w rozwinięciu daje (na przykład dla obrotu wokół osi „x”):

$$O_x(d\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} d\alpha + \dots$$

Macierzowe reprezentacje generatorów odczytane z tego i pozostałych dwóch wzorów mają postać:

$$I_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad I_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sprawdzamy reguły komutacji:

$$\begin{aligned} [I_x, I_y] &\equiv I_x I_y - I_y I_x = i I_z, \\ [I_y, I_z] &= i I_x, \\ [I_z, I_x] &= i I_y. \end{aligned}$$

Generatory grupy obrotów spełniają więc te same reguły komutacji, co podzielone przez \hbar operatory momentu pędu. (Należy podkreślić, że występujące w mechanice kwantowej operatory orbitalnego momentu pędu były pomnożonymi przez \hbar generatorami grupy obrotów reprezentowanej w przestrzeni Hilberta, a nie w przestrzeni trójwymiarowej. Relacje komutacji dla generatorów były jednak te same, bo i grupa ta sama. Zagadnienie reprezentacji grupy obrotów w przestrzeni Hilberta omówimy w odrębnym rozdziale.)

Grupa obrotów $O(3)$ wiąże się z podgrupą macierzy unitarnych grupy $SL(2, \mathbb{C})$ (oznaczono ją $SU(2)$). Do grupy tej należą w szczególności trzy ostatnie macierze U z zadania na stronie 4. Odczytamy z nich reprezentacje generatorów:

$$\text{z punktu d: } I_x = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_1,$$

$$\text{z punktu c: } I_y = \begin{pmatrix} 0 & -i/2 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_2,$$

$$\text{z punktu b: } I_z = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_3.$$

Generatory te spełniają oczekiwane relacje komutacji (zaraz to sprawdzimy), co jest wynikiem ścisłego związku między $O(3)$ i $SU(2)$.

ZADANIE

$$\text{Udowodnij, że } \left[\frac{1}{2} \sigma_i, \frac{1}{2} \sigma_j \right] = i \varepsilon_{ijk} \frac{1}{2} \sigma_k.$$

Rozwiązanie:

Dla $i = j$ twierdzenie jest trywialne. Dla $i \neq j$ dowód można przeprowadzić przez bezpośrednie wyliczenie. Zamiast tego jednak warto najpierw sprawdzić pożyteczny związek

$$\sigma_k \sigma_l = \delta_{kl} I + i \varepsilon_{klm} \sigma_m$$

(należy to zrobić samodzielnie dla par wskaźników $(k, l) = (1, 2), (2, 3)$ i $(1, 3)$) i w oparciu o ten związek udowodnić relacje komutacji. A więc

$$\left[\frac{1}{2} \sigma_i, \frac{1}{2} \sigma_j \right] = \frac{1}{4} (\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i) = \frac{i}{4} (\varepsilon_{ijk} - \varepsilon_{jik}) \sigma_k = \frac{i}{2} \varepsilon_{ijk} \sigma_k,$$

c.b.d.o.

W mechanice kwantowej używamy operatora $\hbar \hat{I}_z = \hat{J}_z$, który reprezentuje w konfiguracyjnej przestrzeni Hilberta generator obrotu wokół osi "z" pomnożony przez \hbar . Jest to operator z-wej składowej orbitalnego momentu pędu.

Jeżeli macierz $\hbar I_z = \hbar \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ zidentyfikować z operatorem z-wej składowej "jakiegoś momentu

pędu", to wypada zauważyć, że:

— baza $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle$ (do której odnoszą się powyższe trzy macierze), jest bazą własną operatora z-wej składowej tego momentu pędu $\hbar \hat{I}_z$;

— ta cecha niektórych cząstek, którą nazywamy "spinem jedna druga", może się wiązać z obiektem z przestrzeni S , który należy takim cząstkom przypisać. Nasza wiedza o spinie elektronu, wyniesiona z kursu nierelatywistycznej mechaniki kwantowej, sprowadza się bowiem do tego, że wiemy, iż elektron posiada własny moment magnetyczny, którego rzut na oś "z" może przyjmować dwie wartości. Z tego wnioskuje się, że moment ten jest związany z wielkością fizyczną zwaną spinem opisywaną pewnym operatorem momentu pędu oraz wektorem stanu należącym do dwuwymiarowej przestrzeni zespolonej napiętej na stanach $|j, m\rangle$, gdzie $j = \frac{1}{2}$, $m = \pm \frac{1}{2}$. Ta wiedza z kolei nasuwa nam podejrzenie, że wymienioną przestrzenią może być przestrzeń S , że trzy generatory obrotu w tej przestrzeni pomnożone przez \hbar są składowymi operatora spinu, a same wektory $|\alpha_1\rangle$ i $|\alpha_2\rangle$ odpowiadają dwóm możliwym rzutom spinu elektronu na oś "z".

ZADANIE

W przestrzeni S rozważamy spinor o współrzędnych $\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Jest to wektor własny operatora $\hbar \hat{I}_z$ do wartości własnej $\hbar/2$, odpowiada więc „spinowi w górę”. Wykonaj obrót układu odniesienia wokół osi "x" o kąt $\pi/2$. Znajdź nowe składowe spinora. Pokaż, że jest to wektor własny operatora \hat{I}_y . Czy ten wynik można było przewidzieć?

Na chwilę zapomnieliśmy o przestrzeni \hat{S} . Zanim sprawdzimy, co się dzieje w tej przestrzeni (w szczególności — jak wyglądają tam reprezentacje generatorów), musimy się bliżej przyjrzeć samej grupie $SL(2, \mathbb{C})$ a w szczególności wypracować w niej technikę podnoszenia i opuszczania wskaźników analogiczną do tej znanej z relatywistyki.

ZADANIE

Udowodnij, że macierze grupy $SL(2, \mathbb{C})$ pozostawiają bez zmiany współrzędne tensora $|\mathcal{E}\rangle$ należącego do $S \otimes S$, który w bazie złożonej z tensorów $|\alpha_r\rangle \otimes |\alpha_s\rangle$ opisany jest macierzą

$$\varepsilon^{rs} (=) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ (lub dowolną do niej proporcjonalną).}$$

Tensor $\|\varepsilon\rangle$ jest więc tensorem niezmienniczym wzgl. $SL(2, \mathbb{C})$.

Taką sytuację znamy z przestrzeni Minkowskiego, gdzie tensorem niezmienniczym wzgl. grupy Lorentza jest tensor g o współrzędnych

$$g^{\mu\nu} (=) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

R o z w i ą z a n i e :

Macierz tensora $\|\varepsilon\rangle$ w przetransformowanej bazie $|\alpha_{r'}\rangle \otimes |\alpha_{s'}\rangle$ wiąże się z macierzą w bazie wyjściowej $\{|\alpha_s\rangle \otimes |\alpha_r\rangle\}$ wzorem:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^{1'1'} & \varepsilon^{1'2'} \\ \varepsilon^{2'1'} & \varepsilon^{2'2'} \end{pmatrix} = U \varepsilon U^T,$$

gdzie $\det U = 1$. Wystarczy więc sprawdzić, czy z warunku $ad - bc = 1$ wynika, że

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ZADANIE

Czy prawdą jest, że

$$\|\varepsilon\rangle = \varepsilon^{kl} |\alpha_k\rangle \otimes |\alpha_l\rangle = -|\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle + |\alpha_2\rangle \otimes |\alpha_1\rangle = \|0\rangle \text{ (tensor zerowy)?}$$

W: Czy iloczyn tensorowy jest przemienny?

Podobnie jak w teorii względności (por. Dodatek 1), tensor niezmienniczy $\|\varepsilon\rangle$ pozwala wprowadzić w S tzw. bazę dualną do bazy $\{|\alpha_r\rangle\}$:

$$|\alpha^s\rangle \equiv |\alpha_r\rangle \varepsilon^{rs}.$$

ZADANIE

Udowodnij, że współrzędne spinorów z S względem bazy $\{|\alpha_r\rangle\}$ wiążą się ze współrzędnymi względem bazy $\{|\alpha^s\rangle\}$ w następujący sposób:

$$\xi^n = \varepsilon^{ml} \xi_l \text{ (tę operację popularnie nazywamy „podnoszeniem wskaźnika” współrzędnej spinora } |\xi\rangle\text{);}$$

$$\xi_l = \xi^n \varepsilon_{ml} \text{ (opuszczanie wskaźnika).}$$

R o z w i ą z a n i e :

Dla każdego spinora $|\xi\rangle$ zachodzi

$$|\xi\rangle = \xi^n |\alpha_n\rangle.$$

Ten sam spinor musi się dać zapisać w bazie $\{|\alpha^r\rangle\}$:

$$|\xi\rangle = \xi_r |\alpha^r\rangle = \xi_r |\alpha_m\rangle \varepsilon^{mr} = \xi_r \varepsilon^{mr} |\alpha_m\rangle = \xi^n |\alpha_m\rangle,$$

z czego wynika pierwszy związek.

Aby pokazać drugi związek, trzeba zdefiniować „dolne” współrzędne tensora $\|\varepsilon\rangle$. Oczywiście powinno zachodzić (podnoszenie wskaźników współrzędnych tensora niezmienniczego):

$$\varepsilon^{ks} = \varepsilon^{kr} \varepsilon^{sm} \varepsilon_{rm},$$

z czego wynika, że

$$\varepsilon^{sm} \varepsilon_{rm} = \delta^s_r,$$

czyli że

$$(\varepsilon^{\bullet\bullet})(\varepsilon_{\bullet\bullet})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

z czego z kolei wynika, że macierz tensora $\|\varepsilon\rangle$ z dolnymi wskaźnikami ma postać

$$(\varepsilon_{\bullet\bullet}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Możemy teraz wyprowadzić drugi związek z pierwszego:

$$\xi^n = \varepsilon^{ml} \xi_l \quad \Big/ \cdot \sum_m \varepsilon_{mr}$$

$$\varepsilon_{mr} \xi^n = \varepsilon_{mr} \varepsilon^{ml} \xi_l = \delta_r^l \xi_l = \xi_r,$$

czyli

$$\xi_r = \xi^n \varepsilon_{nr},$$

c.b.d.o.

UWAGA! Związki $\xi^m = \xi_l \varepsilon^{lm}$, $\xi_r = \varepsilon_{rs} \xi^s$ są nieprawdziwe, bo macierze $\varepsilon^{\bullet\bullet}$ i $\varepsilon_{\bullet\bullet}$ nie są symetryczne.

ZADANIE

Udowodnij, że jeżeli reprezentacja $SL(2, \mathbb{C})$ w przestrzeni S z bazą $\{|\alpha_r\rangle\}$ opisywana jest macierzami U , to w bazie $\{|\alpha^k\rangle\}$ działają macierze $\varepsilon^T U \varepsilon$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \xi^{r'} &= U_s^{r'} \xi^s, & \text{czyli} & & \begin{pmatrix} \xi^{1'} \\ \xi^{2'} \end{pmatrix} &= U \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, \\ \xi^{r'} \varepsilon_{r'n'} &= U_s^{r'} \xi^s \varepsilon_{r'n'}, \\ \xi_{n'} &= U_s^{r'} \varepsilon_{r'n'} \varepsilon^{sp} \xi_p, & \text{czyli} & & \begin{pmatrix} \xi_{1'} \\ \xi_{2'} \end{pmatrix} &= \varepsilon^T U \varepsilon \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

c.b.d.o.

ZADANIE

Dla przestrzeni \dot{S} i reprezentacji $SL(2, \mathbb{C})$ w \dot{S} udowodnij, że macierz tensora niezmienniczego jest taka sama, jak ta używana w przestrzeni S , i że reguły podnoszenia i opuszczania wskaźników kropkowanych są takie same jak dla niekropkowanych.

Jakie macierze odpowiadają transformacji U wykonywanej w S (baza z dolnymi wskaźnikami), jeżeli przejdziemy do \dot{S} i użyjemy baz:

- bazy z kropkowanymi dolnymi wskaźnikami (odp.: \bar{U}),
- bazy z kropkowanymi górnymi wskaźnikami? (odp.: $\varepsilon^T \bar{U} \varepsilon$).

Odpowiedzi udziel przez uzupełnienie poniższych wzorów:

$$\begin{pmatrix} \xi^{1'} \\ \xi^{2'} \end{pmatrix} = \dots \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi_{1'} \\ \xi_{2'} \end{pmatrix} = \dots \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}.$$

ZADANIE

- Udowodnij, że liczby $\xi^k \eta_k$, $\xi^k \eta_k$ są niezmiennikami względem grupy $SL(2, \mathbb{C})$.
(Uwaga: $\xi^k \eta_k = -\xi_k \eta^k$. Warto sprawdzić!)
- Udowodnij, że $t^{kr} \xi_r$ to współrzędne spinora w S (względem bazy $\{|\alpha_k\rangle\}$).
- Podaj inne przykłady obiektów pochodzących z przestrzeni S i \dot{S} oraz z iloczynów tensorowych tych przestrzeni.

Rozwiązanie (pierwszego punktu):

$$\xi^{k'} \eta_{k'} = U_r^{k'} \xi^r \varepsilon_{m'k'} U_s^{m'} \varepsilon^{st} \eta_t = \xi^r U_r^{k'} \varepsilon_{m'k'} U_s^{m'} \varepsilon^{st} \eta_t.$$

Trzeba więc pokazać, że

$$U_r^{k'} \varepsilon_{m'k'} U_s^{m'} \varepsilon^{st} = \delta_r^t, \quad \text{czyli że } U^T \varepsilon^T U \varepsilon = I.$$

Jeżeli przypomnieć, że

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie } ad - bc = 1,$$

to

$$U^T \varepsilon^T U \varepsilon = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

c.b.d.o.

ZADANIE

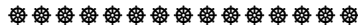
Udowodnij, że znany z relatywistyki tensor metryczny "g" jest ściśle związany z tensorem $\varepsilon^{ab} \varepsilon^{\dot{c}\dot{d}}$ należącym do $S \otimes S \otimes \dot{S} \otimes \dot{S}$.

R o z w i ą z a n i e :

Jeżeli tensory $\|\vec{\tau}\rangle$ i $\|\vec{\kappa}\rangle$ skojarzyć z czterowektorami, to liczba $\varepsilon_{ab} \varepsilon_{\dot{c}\dot{d}} \tau^{ac} \kappa^{bd}$, będąc niezmiennikiem wzgl. $SL(2, C)$, powinna mieć coś wspólnego z relatywistycznym iloczynem skalarnym tych czterowektorów. I rzeczywiście:

$$\varepsilon_{ab} \varepsilon_{\dot{c}\dot{d}} \tau^{ac} \kappa^{bd} = Tr(\varepsilon \kappa \varepsilon^T \tau^T) = 2(\kappa^0 \tau^0 - \vec{\kappa} \vec{\tau}) = 2g^{\mu\nu} \tau_\mu \kappa_\nu,$$

co jest podwojonym iloczynem skalarnym czterowektorów.



2

RÓWNANIE DIRAKA¹

Równanie Diraka opisuje ewolucję czasową stanu kwantowego cząstki o spinie jedna druga (np. elektronu). Droga do tego równania, którą tu opiszemy, jest nieco dłuższa od tej, jaką znaleźć można w klasycznych podręcznikach mechaniki kwantowej, ale za to – jak się wydaje – pozwala na lepszy wgląd w treść fizyczną kryjącą się za równaniem Diraka.

Na początek rozważmy cząstkę punktową o określonej masie, której ruch opisujemy linią świata w przestrzeni Minkowskiego. Jak pokazaliśmy w poprzednim rozdziale, wybór bazy w tej przestrzeni równoważny jest wyborowi określonych baz w przestrzeniach S i \dot{S} . Wektory bazowe $|\alpha_1\rangle$, $|\alpha_2\rangle$ z przestrzeni S zinterpretowaliśmy już w rozdziale pierwszym: wektor $|\alpha_1\rangle$ odpowiada spinowi skierowanemu zgodnie z osią "z", wektor zaś $|\alpha_2\rangle$ – spinowi w dół.

Jeżeli więc przyjmijmy prowizorycznie, że temu atrybutowi cząstki, który odpowiedzialny jest za jej własny moment magnetyczny i który nazywamy spinem, przypisany jest pewien wektor w przestrzeni S , to już na tym etapie – kiedy jeszcze przestrzenny ruch cząstki opisany jest klasycznie (a nie kwantowo) – możemy próbować opisać spin cząstki parą współrzędnych $\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}$ tego wektora w przestrzeni S .

W poprzednim rozdziale wprowadziliśmy jednak obok przestrzeni S drugą, bliźniaczą przestrzeń \dot{S} . Role obydwu tych przestrzeni w konstruowaniu czterowektorów były równoprawne – nie unikniemy więc następującego pytania: w jaki sposób spin cząstki odnosi się do obydwu przestrzeni S i \dot{S} ? Równanie Diraka, którego wyprowadzeniem teraz się zajmujemy, jest zapisem odpowiedzi na to pytanie.

Zinterpretowaliśmy już spinory bazowe $|\alpha_1\rangle$ i $|\alpha_2\rangle$ w S . W celu interpretacji spinorów $|\alpha_1\rangle$ i $|\alpha_2\rangle$ w \dot{S} wróćmy na chwilę do reprezentacji grupy SU(2). Typowe macierze odpowiadające przekształceniom tej grupy wymieniono w punktach b, c i d na str. 8. W przestrzeni \dot{S} w bazie $\{|\alpha_k\rangle\}$ działają macierze \bar{U} . Łatwo sprawdzić, że odpowiadające im generatory mają postać:

$$I_x = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad I_y = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad I_z = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Z postaci macierzy I_z wynika, że wektor $|\alpha_1\rangle$ odpowiadałby rzutowi spinu $-\frac{\hbar}{2}$ a wektor $|\alpha_2\rangle$ rzutowi $\frac{\hbar}{2}$, czyli odwrotnie, niż dla bazy $\{|\alpha_k\rangle\}$ w przestrzeni S . Z pomocą przychodzi tensor niezmienniczy \mathcal{E}^{is} , który pozwala stwierdzić, że dla bazy $\{|\alpha^k\rangle\}$ relacje są już "naturalne", bo

$$|\alpha^1\rangle \equiv |\alpha_s\rangle \mathcal{E}^{s1} = |\alpha_2\rangle,$$

¹ Pisownia nazwiska Diraka, którą zastosowaliśmy pod wpływem sugestii Recenzenta, odbiega od oryginalnej, powszechnie spotykanej w polskojęzycznych podręcznikach (Dirac). „Słownik Języka Polskiego” dopuszcza pisanie znanych francuskich nazwisk kończących się na „ac” ze spolszczoną końcówką „ak”, np. Balzak. Motywacją dla takiego postępowania może być trudna do utworzenia forma narzędnika od nazwiska zapisanego w formie oryginalnej.

$$|\alpha^2\rangle \equiv |\alpha_s\rangle \mathcal{E}^{i^2} = -|\alpha_i\rangle$$

i teraz już widać, że $|\alpha^i\rangle$ odpowiada „spinowi w górę”, $|\alpha^2\rangle$ odpowiada „spinowi w dół”.

Zastanówmy się teraz, jakie relacje mogą zachodzić pomiędzy parą współrzędnych $\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}$ opisujących spin cząstki w S a parą $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, która powinna opisywać spin tej samej cząstki w \dot{S} .

Założmy, że oglądamy cząstkę z jakiegoś inercyjnego układu odniesienia. Założmy dalej, że cząstka ma określony rzut spinu na oś „z” równy na przykład $+\frac{\hbar}{2}$ i niech to będzie odnotowane w przestrzeniach S i \dot{S} w ten sposób, że współrzędne ξ^k opisujące ten spin wynoszą:

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i są równe współrzędnym ξ_k :

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Oznacza to, że w S spinowi naszej cząstki odpowiada wektor (spinor) $|\alpha_1\rangle$ a w \dot{S} wektor $|\alpha^i\rangle$.

Założyliśmy więc na chwilę, że obrazy spinu wybranej cząstki oglądane w S i \dot{S} są takie same. Przejdźmy teraz do innego układu odniesienia. Wykonujemy więc bierną transformację Lorentza, czyli współrzędne spinorów ulegają zmianie wg przepisu:

$$\begin{pmatrix} \xi^{1'} \\ \xi^{2'} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \xi_{1'} \\ \xi_{2'} \end{pmatrix} = \mathcal{E}^T \bar{U} \mathcal{E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obrazy tego samego spinu w S i \dot{S} są teraz na ogół różne! Sprawdźmy to. Zaczniemy od obrotów. Macierze b, c i d (str. 8) działające w S na współrzędne ξ^k są typowymi przykładami obrotów – każdy obrót da się „poskładać” z takich obrotów elementarnych.

Macierz transformująca współrzędne ξ_k ma postać $\mathcal{E}^T \bar{U} \mathcal{E}$ (por. zadanie na str. 15). Łatwo sprawdzić, że dla macierzy wymienionych w zadaniu w punktach „b”, „c” i „d” zachodzi $\mathcal{E}^T \bar{U} \mathcal{E} = U$.² Tak więc obroty nie dają jeszcze niczego zaskakującego: jakkolwiek byłby „spin początkowy”, to patrząc z układu obróconego widzimy nadal taki sam obraz spinu w S i \dot{S} . Spróbujmy teraz wykonać transformację Lorentza z jakąś różną od zera prędkością względną układów odniesienia. Zaczniemy od prędkości wzdłuż osi „z” (macierz wymienia w punkcie „a” na str. 8):

² Ten sam związek zachodzi dla dowolnej macierzy unitarnej U , co można łatwo pokazać.

$$\begin{pmatrix} \xi^{1'} \\ \xi^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\varphi/2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \xi_{1'} \\ \xi_{2'} \end{pmatrix} = \varepsilon^T \bar{U} \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\varphi/2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Już widać, że dzieje się coś ciekawego. Wprawdzie obydwa spinory wskazują ciągle jeszcze rzut $+\frac{1}{2}\hbar$ ale wartości współrzędnych są już różne.

Przejdźmy na koniec do układu poruszającego się w kierunku innym, niż oś „z”. W tym celu wystarczy wykonać najpierw obrót układu wokół osi (na przykład) „x” o kąt α równy (na przykład) $\frac{\pi}{2}$ a następnie wykonać transformację wymienioną w punkcie „a” w kierunku nowej osi „z”. Współrzędne spinora z przestrzeni S (względem bazy $\{|\alpha_k\rangle\}$) ulegną transformacji:

$$\begin{pmatrix} \xi^{1'} \\ \xi^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & i\frac{1}{\sqrt{2}} \\ i\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-\varphi/2} \\ ie^{\varphi/2} \end{pmatrix}$$

a współrzędne spinora z przestrzeni \dot{S} (względem bazy $\{|\alpha^k\rangle\}$):

$$\begin{pmatrix} \xi_{1'} \\ \xi_{2'} \end{pmatrix} = \varepsilon^T \bar{U}_a \varepsilon \varepsilon^T \bar{U}_a \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon^T \bar{U}_a \bar{U}_a \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\varphi/2} \\ ie^{-\varphi/2} \end{pmatrix}.$$

Teraz już widać istotną różnicę. Obydwaj reprezentanci spinu (w S i \dot{S}) nie mają już określonego rzutu spinu na oś „z” (i to nie dziwi, wszak obracaliśmy wokół osi „x”). Ale dla prędkości względnej układów różnej od zera (założymy dla przykładu, że $\varphi > 0$) obraz z przestrzeni S wskazuje spin „raczej w dół” a w \dot{S} „raczej w górę”. Musimy pogodzić się z tym, że obrazy spinu cząstki odczytywane z przestrzeniach S i \dot{S} będą na ogół różne!

Można więc postawić takie pytanie: czy dla danej cząstki, której spin chcemy opisać, da się w jakimś uniwersalnym sposobie wskazać taki układ odniesienia, w którym obrazy jej spinu w przestrzeniach S i \dot{S} są takie same?

Okazuje się, że:

- **układem tym jest układ spoczynkowy cząstki** (warto zauważyć, że jest to jedyny układ wyróżniony przez cząstkę);
- **stwierdzenie tego faktu jest równoważne napisaniu równania Diraka**. Wyprowadzeniem tradycyjnej postaci tego równania teraz się zajmiemy.

Założenie o tym, że obrazy spinu cząstki w S i \dot{S} są takie same, jeżeli patrzeć z układu spoczynkowego tej cząstki, zapiszemy teraz w formie kowariantnej:

$$u^{ki} \xi_i = \xi^k,$$

gdzie macierz u^{ki} , to współrzędne takiego szczególnego tensora należącego do $S \otimes \dot{S}$, że w układzie spoczynkowym cząstki przyjmują one postać macierzy jednostkowej. Mamy więc

$$u^{ki} (=) \begin{pmatrix} u^0 + u^3 & u^1 - iu^2 \\ u^1 + iu^2 & u^0 - u^3 \end{pmatrix} = |w \text{ układzie spoczynkowym}| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Czterowektorem odpowiadającym macierzy u^{ki} okazuje się więc być czteroprędkość cząstki (w układzie jednostek, w którym $c=1$ czteroprędkość cząstki spoczywającej ma składowe $u^0=1$, $u^1=u^2=u^3=0$).

W układzie odniesienia innym niż układ spoczynkowy macierz u^{ki} nie jest już macierzą jednostkową i współrzędne ξ^k oraz ξ_i są różne. Kowariantny zapis gwarantuje, że związek współrzędnych ξ^k i ξ_i jest ważny w każdym układzie odniesienia. Mnożąc go obustronnie przez masę spoczynkową cząstki otrzymujemy dla cząstki swobodnej związki:

$$p^{ki} \xi_i = m \xi^k,$$

gdzie p^{ki} jest tensorem czteropędu cząstki swobodnej.

ZADANIE

Udowodnij, że $p_{ki} p^{ki} = m^2 \delta_r^i$.

Rozwiązanie:

$$p_{ki} = p^{rs} \varepsilon_{rk} \varepsilon_{si},$$

czyli

$$\begin{aligned} p_{\bullet\bullet} &= \varepsilon^T p^{\bullet\bullet} \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^0 + p^3 & p^1 - ip^2 \\ p^1 + ip^2 & p^0 - p^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p^0 - p^3 & -p^1 - ip^2 \\ -p^1 + ip^2 & p^0 + p^3 \end{pmatrix}. \\ p_{ki} p^{ki} (=) p_{\bullet\bullet}^T p^{\bullet\bullet} &= \begin{pmatrix} p^0 - p^3 & -p^1 + ip^2 \\ -p^1 - ip^2 & p^0 + p^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^0 + p^3 & p^1 - ip^2 \\ p^1 + ip^2 & p^0 - p^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p^{02} - \vec{p}^2 & 0 \\ 0 & p^{02} - \vec{p}^2 \end{pmatrix} = m^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

c.b.d.o.



Przyjmijmy więc, że kompletny opis spinora wymaga podania kompletu czterech współrzędnych w postaci (na przykład) $\xi^1, \xi^2, \xi_1, \xi_2$. Oznacza to, że opisujemy spinor w przestrzeni $S \oplus \dot{S}$ (używając bazy $\{|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, |\alpha^1\rangle, |\alpha^2\rangle\}$). Komplet tych współrzędnych wypisuje się tradycyjnie w postaci kolumny a obiekt z przestrzeni $S \oplus \dot{S}$, któremu ten komplet współrzędnych odpowiada, nazywamy bispinorem.

Przekształcając związek $p^{ki} \xi_i = m \xi^k$ wg przepisu:

$$p^{ki} \xi_i = m \xi^k \quad \Big/ \cdot \sum_k p_{k\dot{k}},$$

$$p_{k\dot{k}} p^{ki} \xi_i = m \xi^k p_{k\dot{k}},$$

i korzystając z wyniku ostatniego zadania mamy

$$m^2 \xi_i = m \xi^k p_{k\dot{i}},$$

co prowadzi do bliźniaczego związku

$$\xi^k p_{k\dot{i}} = m \xi_i.$$

Jesteśmy teraz gotowi do napisania tradycyjnej postaci równania Diraka dla bispinora. Równanie wyjściowe i to wyprowadzone powyżej możemy zapisać w postaci

$$p^{\bullet\bullet} \xi_{\bullet} = m \xi^{\bullet}, \quad p_{\bullet\bullet}^T \xi^{\bullet} = m \xi_{\bullet},$$

co ujęte w postaci jednego równania macierzowego wyglądałoby tak:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p^{1\dot{1}} & p^{1\dot{2}} \\ 0 & 0 & p^{2\dot{1}} & p^{2\dot{2}} \\ p_{1\dot{1}} & p_{2\dot{1}} & 0 & 0 \\ p_{1\dot{2}} & p_{2\dot{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}.$$

Wprowadzimy teraz oznaczenia

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p^{1\dot{1}} & p^{1\dot{2}} \\ 0 & 0 & p^{2\dot{1}} & p^{2\dot{2}} \\ p_{1\dot{1}} & p_{2\dot{1}} & 0 & 0 \\ p_{1\dot{2}} & p_{2\dot{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p^0 + p^3 & p^1 - ip^2 \\ 0 & 0 & p^1 + ip^2 & p^0 - p^3 \\ p^0 - p^3 & -p^1 + ip^2 & 0 & 0 \\ -p^1 - ip^2 & p^0 + p^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \gamma_{\mu} p^{\mu},$$

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \equiv \Phi,$$

gdzie macierze γ_{μ} mają postać:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & +i & 0 \\ 0 & +i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix},$$

czyli w skrócie

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Jeżeli oznaczyć

$$p^\mu \gamma_\mu (= p_\mu \gamma^\mu) \equiv \not{p},$$

to równanie Diraka dla cząstki swobodnej zapiszemy:

$$(\not{p} - m)\Phi = 0.$$

ZADANIE

Jak wygląda równanie Diraka wypisane z jawnym oznaczeniem prędkości światła „ c ”?

W: Należy prześledzić wyprowadzenie równania Diraka i odnaleźć to miejsce, gdzie położyliśmy $c = 1$.

[Odp: $(\not{p} - mc)\Phi = 0$.]

UWAGA!

W niektórych opracowaniach zamiast macierzy $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ używa się macierzy $(\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) = (\sigma_0, -\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3)$. Jest to związane z wyborem konwencji zapisu wyrażenia $p^\mu \gamma_\mu$. Albo używamy kontrawariantnych składowych czteropędu i wtedy piszemy $p^\mu \gamma_\mu$ i stosujemy macierze γ_μ ,

które wypisano wyżej, albo używamy kowariantnych składowych czteropędu (różniących się od tych poprzednich znakiem przestrzennych składowych) i piszemy $p_\mu \gamma^\mu$. Ta druga wersja jest często spotykana a dodatkowo przemawia za nią to, że zmiennymi kanonicznie sprzężonymi do kontrawariantnych składowych czteropłożenia są kowariantne składowe pędu. (Wszak można napisać związek,

$$\frac{dx^k}{dx^0} = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

który dla $k = 1, 2, 3$ daje trzy pierwsze równania Hamiltona.) Można więc używać macierzy γ^μ pamiętając o tym, że dla $k = 1, 2, 3$ zachodzi $\gamma_k = -\gamma^k$.

Warto zwrócić uwagę, że na razie napisaliśmy równanie Diraka, w którym nie występują takie charakterystyczne dla mechaniki kwantowej elementy, jak przestrzenna funkcja falowa i operatory działające w konfiguracyjnej przestrzeni Hilberta.

Podsumowując: równanie Diraka dla cząstki swobodnej jest syntetycznym zapisem dwóch niezależnych stwierdzeń:

- masa cząstki opisywanej równaniem wynosi m (albo inaczej: zachodzi związek między pędem i energią: $p^{0^2} - \vec{p}^2 = m^2$);
- dla spoczywającej cząstki ze spinem zachodzi $\xi^r = \xi_r$.

Równanie Diraka w mechanice kwantowej.

Jak wiemy, dla opisu danego układu fizycznego korzysta się w mechanice kwantowej z tzw. przestrzeni Hilberta stanów fizycznych $|\ \rangle$. Podczas wstępnego kursu mechaniki kwantowej poznajemy najprostszą wersję tej przestrzeni – odpowiada ona opisowi konfiguracyjnych stopni swobody cząstki. Najczęściej używaną bazą w tej przestrzeni jest baza wektorów własnych $|\vec{x}\rangle$ operatora położenia \hat{x} : $\hat{x}|\vec{x}\rangle = \vec{x}|\vec{x}\rangle$. (Zauważmy, że oznaczenie „iks ze strzałką” występuje tu w trzech różnych rolach. Jakich?) Współrzędne wektorów stanu w tej bazie $\langle \vec{x} | \Psi \rangle$ nazywamy funkcjami falowymi w reprezentacji położenia.

Formalizm kwantowy, który chcemy tu zbudować, ma szersze ambicje. Rozszerzenie ma polegać na zarejestrowaniu faktu, że opisywana cząstka ma, oprócz położenia, wewnętrzne stopnie swobody manifestujące swoje istnienie spinem (bezpośrednio w eksperymencie: własnym momentem magnetycznym cząstki). Wektor stanu cząstki – oprócz przestrzennego rozkładu prawdopodobieństw – winien więc teraz uwzględniać spinowe stopnie swobody, co będzie wymagało odpowiedniego rozbudowania przestrzeni Hilberta.

W wprowadzonym przez nas klasycznym równaniu Diraka występuje czteropęd cząstki. W kwantowym stanie układu złożonego z pojedynczej cząstki jej pęd nie musi być (i na ogół nie jest) określony, chociaż zawsze jest możliwy rozkład funkcji falowej na funkcje własne pędu. Zaczniemy więc od stanów z określonym pędem, opisanych w przestrzeni konfiguracyjnej funkcją falową $\Psi(x) \sim e^{-\frac{i}{\hbar} px}$, (gdzie $px = Et - \vec{p} \cdot \vec{x}$).

Zbudujmy czterokomponentową funkcję $e^{-\frac{i}{\hbar} px} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, gdzie fala płaska $e^{-\frac{i}{\hbar} px}$ opisuje stan układu w

przestrzeni konfiguracyjnej a kolumna jest odpowiedzialna za obraz spinu cząstki w przestrzeni $S \oplus \dot{S}$. Powinno zachodzić

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{-\frac{i}{\hbar}px} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}_{\vec{p}} = 0,$$

bo w miejsce operatora $i\hbar\partial_\mu$ pojawi się p_μ i teraz liczbowa macierz $(\gamma^\mu p_\mu - m)$ zadba o właściwą dla danego czteropędu relację między współrzędnymi ξ^k i ξ_k . Wiemy już, że współrzędne występujące w kolumnie będą między sobą uzgodnione, odpowiednio do wartości pędu – stąd indeks przy tej kolumnie.

Aby przejść do stanów odpowiadających jakimś innym funkcjom falowym ze zwykłej przestrzeni Hilberta, np. $\psi(x) = \int \varphi(\vec{p})e^{-\frac{i}{\hbar}px} d^3 p$, musimy scałkować równanie Diraka z wagą $\varphi(\vec{p})$:

$$\int \varphi(\vec{p})d^3 p \left[(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{-\frac{i}{\hbar}px} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}_{\vec{p}} \right] = 0,$$

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m) \int \varphi(\vec{p})d^3 p e^{-\frac{i}{\hbar}px} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}_{\vec{p}} = 0 \quad (\text{Całkowanie po pędach obejmuje też kolumnę}$$

współrzędnych!).

Występująca tu całka ma postać czterokomponentowej kolumny zawierającej funkcje zmiennych x :

$$\int \varphi(\vec{p})d^3 p e^{-\frac{i}{\hbar}px} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}_{\vec{p}} = \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \\ \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix},$$

gdzie na przykład $|\psi^1(x)|^2 d^3 x$ jest prawdopodobieństwem tego, że w chwili x^0 cząstka znajdzie się w objętości $d^3 x$ wokół punktu \vec{x} a w przestrzeni S będzie miała „spin do góry”. Taka interpretacja wymaga oczywiście zadbania o właściwą normalizację bispinora (zauważmy, że równanie Diraka – podobnie jak równanie Schrödingera – jest nieczułe na zmianę normalizacji funkcji falowej). Zagadnieniem normalizacji zajmiemy się niżej.

Zwróćmy uwagę na to, że bispinowa funkcja falowa w postaci $\begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \\ \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$ jest reprezentacją wektora

stanu należącego do przestrzeni Hilberta rozszerzonej o przestrzeń $S \oplus \dot{S}$. Jeżeli więc konfiguracyjną

przestrzeń Hilberta oznaczyć przez H to przestrzenią rozszerzoną jest $H \otimes (S \oplus \dot{S})$. Baza, w której opisujemy tu wektory stanu, składa się z wektorów $|\vec{x}\rangle \otimes |\alpha\rangle$, gdzie $|\vec{x}\rangle$ to wektory własne operatora położenia działającego w H a w miejscu $|\alpha\rangle$ występuje jeden z czterech wektorów $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, |\alpha^1\rangle, |\alpha^2\rangle$ napinających przestrzeń $S \oplus \dot{S}$.

Uzyskane przez nas równanie

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi(x) = 0, \quad \text{albo} \quad (\hat{\mathcal{D}} - m)\Psi(x) = 0$$

jest kwantowym równaniem Diraka dla cząstki swobodnej.

ZADANIE

Sprawdź, że $(p_\nu\gamma^\nu + m)(p_\mu\gamma^\mu - m) = p^2 - m^2$, czyli że równanie powłoki mas jest wbudowane do równania Diraka.

W.: Korzystając z tego, że $\sigma_k\sigma_l = \delta_{kl}\sigma_0 + i\epsilon_{klm}\sigma_m$ (wskaźniki k, l, m numerują tylko składowe przestrzenne) można pokazać, że $\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) = g^{\mu\nu}I$.

Równanie Diraka dla punktowej cząstki naładowanej oddziałującej z polem elektromagnetycznym

ZADANIE

Związek między prędkością cząstki w polu elektromagnetycznym i jej pędem kanonicznym

a. Przypadek nierelatywistyczny

Hamiltonian cząstki swobodnej ma postać $H = \frac{\vec{p}^2}{2m}$. Jak wiemy, przejście do hamiltonianu w polu o potencjałach (φ, \vec{A}) następuje przez zastąpienie (zapis w systemie jednostek SI):

$$H \rightarrow H - e\varphi, \quad \vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A}.$$

Sprawdź, że powyższa regułka działa prawidłowo, czyli że dla hamiltonianu

$$H = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + e\varphi$$

otrzymujemy poprawny związek między pędem kanonicznym \vec{p} i prędkością $\dot{\vec{x}}$: $\vec{p} = m\dot{\vec{x}} + e\vec{A}$ oraz poprawne równanie ruchu w postaci $m\ddot{\vec{x}} = e(\dot{\vec{x}} \times \vec{B}) + e\vec{E}$.

(przypadek b. – niżej)

Rozwiązanie:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{1}{m}(p_x - eA_x) \quad \text{i podobnie dla pozostałych składowych. Stąd}$$

$$\vec{p} = m\dot{\vec{x}} + e\vec{A}.$$

Reszta równań Hamiltona prowadzi do

$$\begin{aligned} -\dot{p}_x &= \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{m}(\vec{p} - e\vec{A}) \cdot \left(-e \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\right) + e \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ -m\ddot{x} - e \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} \right) - e \frac{\partial A_x}{\partial t} &= -e\dot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + e \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ m\ddot{x} &= e\dot{y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - e\dot{z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + e \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \right), \\ m\ddot{x} &= e(\dot{\vec{x}} \times \vec{B})_x + eE_x \end{aligned}$$

i podobnie dla pozostałych składowych, czyli

$$m\ddot{\vec{x}} = e\dot{\vec{x}} \times \vec{B} + e\vec{E},$$

co jest drugą zasadą dynamiki z udziałem siły Lorentza i oddziaływania z polem elektrycznym.

ZADANIE c.d.

b. Przypadek relatywistyczny

Dla relatywistycznej cząstki swobodnej obowiązuje równanie powłoki mas $E^2 - \vec{p}^2 = m^2$.³ Hamiltonian napisany w oparciu o ten związek ma postać $H = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ [$H = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}$]. Sprawdź, jaki jest wynikający z tego hamiltonianu związek między przestrzennymi składowymi czteropędu cząstki

$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ [$u^\mu = c \frac{dx^\mu}{ds}$] i pędem kanonicznym. Powtórz to rozumowanie dla cząstki w polu elektromagnetycznym, gdy obowiązuje hamiltonian $H = \sqrt{(\vec{p} - e\vec{A})^2 + m^2} + e\varphi$ [$H = c\sqrt{(\vec{p} - e\vec{A})^2 + m^2 c^2} + e\varphi$].

Pokaż, że $p^\mu - eA^\mu = mu^\mu$.

[W zapisie „z jawną prędkością światła” ten ostatni wzór wygląda identycznie, z tym, że $p^0 = \frac{E}{c}$ a p^1, p^2, p^3 są zwykłymi kontrawariantnymi składowymi pędu przestrzennego. Podobnie $A^0 = \frac{\varphi}{c}$ a

³ W notacji nie korzystającej z założenia $c = 1$ równanie powłoki mas ma postać $\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2$.

A^1, A^2, A^3 są kontrawariantnymi składowymi wektora \vec{A} spełniającego standardowy i niezależny od konwencji zapisu prędkości światła związek $\text{rot}\vec{A} = \vec{B}$.]

Rozwiązanie:

Dla cząstki swobodnej odpowiednie równania Hamiltona mają postać

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \quad \text{itd.,} \quad \text{czyli} \quad \dot{\vec{x}} = \vec{v} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}.$$

Wynika stąd, że

$$\vec{p}^2 = \frac{m^2 v^2}{1 - v^2}, \quad \left[\vec{p}^2 = \frac{m^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right]$$

czyli

$$\vec{p} = \vec{v} \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2}} = m\vec{u} \quad \left[\vec{p} = \frac{\vec{v}}{c} \sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m\vec{u} \right].$$

Dla składowej zerowej czteropędu mamy zaś

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}} = mu^0 \quad \left[\frac{E}{c} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2} = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mu^0 \right].$$

Zupełnie tak samo prowadzimy rachunek dla przypadku z oddziaływaniem i otrzymujemy

$$p^\mu - eA^\mu = mu^\mu.$$

Powyższy związek wyraża czteropędkość cząstki w polu elektromagnetycznym przez jej czteropęd kanoniczny i pozwala napisać równanie Diraka dla cząstki w polu:

w wersji „klasycznej” $\left[\gamma_\mu (p^\mu - eA^\mu) - m \right] \Phi = 0$

i w wersji kwantowej $\left[\gamma_\mu (i\hbar\partial^\mu - eA^\mu) - m \right] \Psi(x) = 0.$

(Pisząc jawnie prędkość światła musimy w obydwu równaniach zastąpić m przez mc).



Równanie Diraka jako równanie ewolucji w czasie.

Ewolucja stanu fizycznego $|\Psi\rangle$ w czasie opisywana jest w mechanice kwantowej równaniem

$$i\hbar\partial_t|\Psi\rangle = \hat{H}|\Psi\rangle.$$

Dla cząstek bez spinu, opisywanych w reprezentacji położenia, równanie to przybiera postać równania Schrödingera. Wyprowadzone wyżej równanie Diraka również jest równaniem ewolucji. Mamy bowiem (poniższe rachunki wykonamy dla cząstki swobodnej – uogólnienie na przypadek z oddziaływaniem jest trywialne):

$$(i\hbar\gamma^0\partial_0 + i\hbar\gamma^k\partial_k - m)\Psi = 0,$$

gdzie

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Łatwo sprawdzić, że $\gamma^0\gamma^0 = I$. Wykorzystamy to mnożąc równanie Diraka przez γ^0 . Otrzymujemy:

$$(i\hbar\partial_0 + i\hbar\gamma^0\gamma^k\partial_k - \gamma^0m)\Psi = 0.$$

Wprowadzimy nowe (powszechnie używane) oznaczenia dla występujących tu macierzy 4×4:

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^0\gamma^k = \alpha^k,$$

$$\beta \equiv \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^k \equiv \gamma^0\gamma^k = \begin{pmatrix} -\sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & -\sigma_k \end{pmatrix}.$$

Trzy „przestrzenne” macierze Pauliego z dolnymi wskaźnikami $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ oznacza się często przez $\vec{\sigma}$.

Zapiszemy wówczas: $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix}$. Jeżeli skorzystamy z tego, że:

$$i\hbar\gamma^0\gamma^k\partial_k = i\hbar\alpha^k\partial_k = \alpha^k\hat{p}_k = -\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}},$$

to równanie Diraka możemy zapisać w postaci

$$i\hbar\partial_0\Psi = (\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta m)\Psi$$

a operator

$$\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta m = -i\hbar\alpha^k\partial_k + \beta m$$

wypada nazwać operatorem Hamiltona.

Uwaga: tu $x^0 = t$. Gdyby wprowadzić jawne oznaczenie prędkości światła, to poprzednie równanie miałyby postać $i\hbar\partial_0\Psi = (\vec{\alpha}\cdot\hat{p} + \beta mc)\Psi$, i otrzymalibyśmy z niego $i\hbar\partial_t\Psi = (c\vec{\alpha}\cdot\hat{p} + \beta mc^2)\Psi$ z hamiltonianem $\hat{H} = c\vec{\alpha}\cdot\hat{p} + \beta mc^2$.

Reprezentacja standardowa równania Diraka

Równanie Diraka wprowadziliśmy w reprezentacji spinorowej. Przez zmianę reprezentacji rozumiemy tu zmianę bazy w $S \oplus \dot{S}$. Reprezentacja spinorowa obowiązuje w bazie $\{|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, |\alpha^1\rangle, |\alpha^2\rangle\}$, w której

spinorowi odpowiadają współrzędne $\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$. Biorąc w charakterze bazy odpowiednie liniowo niezależne

kombinacje liniowe spinorów bazowych $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, |\alpha^1\rangle, |\alpha^2\rangle$ możemy przejść do nowej bazy (tzw.

standardowej), w której bispinorowi odpowiadają nowe współrzędne $\Psi_{st} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$ spełniające związki

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^\bullet + \xi_\bullet), \quad \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^\bullet - \xi_\bullet).^4$$

ZADANIE

Niech współrzędne $\varphi_1, \varphi_2, \chi_1, \chi_2$ odnoszą się do spinorów bazowych $|\varphi^1\rangle, |\varphi^2\rangle, |\chi^1\rangle, |\chi^2\rangle$. Należy wyrazić te spinory przez $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, |\alpha^1\rangle, |\alpha^2\rangle$.

Rozwiązanie:

Jeżeli

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \equiv A \begin{pmatrix} \xi^\bullet \\ \xi_\bullet \end{pmatrix},$$

to

⁴ Dla wskaźników w bazie standardowej nie rozwiniemy formalizmu ich opuszczania i podnoszenia.

$$\left(|\varphi^1\rangle, |\varphi^2\rangle, |\chi^1\rangle, |\chi^2\rangle \right) = \left(|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, |\alpha^1\rangle, |\alpha^2\rangle \right) A^{-1},$$

$$A^{-1} = A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}$$

i dlatego

$$|\varphi^1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\alpha_1\rangle + |\alpha^1\rangle \right),$$

$$|\varphi^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\alpha_2\rangle + |\alpha^2\rangle \right),$$

$$|\chi^1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\alpha_1\rangle - |\alpha^1\rangle \right),$$

$$|\chi^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\alpha_2\rangle - |\alpha^2\rangle \right).$$

ZADANIE

Napisz ogólną postać kolumny współrzędnych bispinora standardowego cząstki spoczywającej. Jaki jest ten bispinor gdy rzut spinu cząstki na oś „z” wynosi (na przykład) $-\frac{1}{2}\hbar$?

Równanie Diraka dla bispinora $\Psi_{st} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$ znajdziemy drogą odpowiedniego podstawienia w

równaniu Diraka w reprezentacji spinorowej:

$$\begin{pmatrix} \xi^{\cdot} \\ \xi_{\cdot} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Prowadzi to do nowych macierzy β_{st} i $\vec{\alpha}_{st}$:

$$A \cdot / \quad i\hbar \partial_0 A^{-1} \Psi_{st} = \left(\vec{\alpha} \cdot \hat{p} + \beta m \right) A^{-1} \Psi_{st},$$

$$i\hbar \partial_0 \Psi_{st} = \left(\vec{\alpha}_{st} \cdot \hat{p} + \beta_{st} m \right) \Psi_{st},$$

gdzie

$$\vec{\alpha}_{st} = A \vec{\alpha} A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta_{st} = A \beta A^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że macierze $\vec{\alpha}$ i β są hermitowskie i że ta własność nie może zależeć od reprezentacji.

ZADANIE

Oblicz jawną postać czterech macierzy γ^μ w reprezentacji standardowej.

Rozwiązanie:

Równanie Diraka

$$(i\hbar\gamma^\mu \hat{p}_\mu - m) \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0$$

ma następującą strukturę: macierz 4×4 (elementy tej macierzy zawierają różniczkowanie po zmiennych czasoprzestrzennych) działa na kolumnę (reprezentację wektora). Zmiana bazy w przestrzeni $S \oplus \dot{S}$ prowadząca do zmiany współrzędnych

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} & \\ & A \\ & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

gdzie A jest macierzą liczbową unitarną o rozmiarach 4×4 , doprowadzi do zmiany macierzy reprezentującej operator

$$A(i\hbar\gamma^\mu \hat{p}_\mu - m)A^{-1} = i\hbar A\gamma^\mu A^{-1}\hat{p}_\mu - m.$$

Stąd

$$\begin{aligned} \gamma_{st}^\mu &= A\gamma^\mu A^{-1}, \\ \gamma_{st}^0 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \\ \gamma_{st}^k &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Przejście do nowej reprezentacji w przestrzeni $S \oplus \dot{S}$ odbywa się zawsze za pomocą jakiejś macierzy unitarnej (takiej, jak na przykład macierz A). Wszystkie takie transformacje pozostawiają bez zmiany przytoczone już wyżej relacje antykomutacji między macierzami gamma:

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu}I \quad (I \text{ jest macierzą jednostkową } 4 \times 4)$$

oraz odpowiednie relacje spełniane przez macierze $\vec{\alpha}$ i β :

$$\begin{aligned}\alpha^{k^2} &= \beta^2 = I, \\ [\alpha^k, \alpha^l]_+ &= 0 \quad \text{dla } k \neq l, \\ [\alpha^k, \beta]_+ &= 0.\end{aligned}$$

ZADANIE

Sprawdź powyższe wzory dotyczące macierzy $\bar{\alpha}$ i β a także pokaż, że kwadrat macierzy γ^0 jest macierzą jednostkową I a kwadraty macierzy γ^k (dla $k = 1, 2, 3$) są równe $-I$.

Jak się okaże, w rachunkach, w których występują macierze gamma, istotne są powyższe relacje antykomutacji a nie konkretna postać (konkretna reprezentacja) macierzy γ^μ , $\bar{\alpha}$, czy β .

Zupełny układ rozwiązań równania Diraka dla cząstki swobodnej w reprezentacji standardowej.

Równanie Diraka (w wersji z jawnym „c”) ma postać:

$$i\hbar\partial_0\Psi = (\bar{\alpha}\cdot\hat{p} + \beta mc)\Psi.$$

Separacja czasu jest trywialna:

$$\Psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x})e^{-\frac{i}{\hbar}Et}.$$

W składowej konfiguracyjnej H przestrzeni Hilberta $H \otimes (S \oplus \dot{S})$ możemy wybrać rozwiązanie w postaci fali płaskiej (bo operator pędu komutuje z hamiltonianem), co daje nam bispinową funkcję falową w postaci

$$\psi(\vec{x}) = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}} u, \quad \text{gdzie} \quad u = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$$

i reprezentuje postać wektora stanu w składowej spinowej przestrzeni Hilberta. Równanie Diraka zredukowane do macierzy u zapiszemy w postaci

$$Eu = (c\bar{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2)u.$$

W reprezentacji standardowej macierze $\bar{\alpha}$ i β mają postać:

$$\bar{\alpha}_{st} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_{st} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

co pozwala przepisać równanie Diraka w postaci:

$$E \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \left[c \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x p_x \\ \sigma_x p_x & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y p_y \\ \sigma_y p_y & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z p_z \\ \sigma_z p_z & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix},$$

równoważnej układowi czterech równań jednorodnych na składowe bispinora standardowego:

$$\begin{aligned} (E - mc^2)\varphi_1 - cp_z\chi_1 - c(p_x - ip_y)\chi_2 &= 0, \\ (E - mc^2)\varphi_2 - c(p_x + ip_y)\chi_1 + cp_z\chi_2 &= 0, \\ (E + mc^2)\chi_1 - cp_z\varphi_1 - c(p_x - ip_y)\varphi_2 &= 0, \\ (E + mc^2)\chi_2 - c(p_x + ip_y)\varphi_1 + cp_z\varphi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Wyznacznik podstawowy tego układu równań wynosi $(E^2 - c^2\vec{p}^2 - m^2c^4)^2$ i znika (zera drugiego rzędu!) dla $E = \pm\sqrt{c^2\vec{p}^2 + m^2c^4}$.

Tak więc dla energii $E = E_+ = +\sqrt{c^2\vec{p}^2 + m^2c^4}$ pozostają nam dwa równania na cztery niewiadome. Możemy dowolnie wybierać składowe φ_1 i φ_2 (albo inne właściwe dwie z czterech), resztę składowych wyliczając z równań. Otrzymamy przykładowo:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}_{(+),\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E_+ + mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E_+ + mc^2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}_{(+),\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x - ip_y)}{E_+ + mc^2} \\ \frac{-cp_z}{E_+ + mc^2} \end{pmatrix}.$$

Powyższe rozwiązania zapisane są w reprezentacji standardowej. Zauważmy, że górne składowe φ są rzędu jedynki a dolne χ rzędu $\frac{v}{c}$ (gdzie v oznacza szybkość cząstki) i byłyby do zaniedbania w przybliżeniu nierelatywistycznym. Wynik ten wskazuje na to, że pojawianie się różnicy między składowymi ξ^s i ξ_s dla cząstki będącej w ruchu jest efektem relatywistycznym. Składowe φ i χ rozwiązań o energii dodatniej nazywa się czasami składowymi – odpowiednio – „dużymi” i „małymi” bispinora standardowego.

Rozwiązania $\begin{pmatrix} \end{pmatrix}_{(-),\uparrow}$ i $\begin{pmatrix} \end{pmatrix}_{(-),\downarrow}$ odpowiadające $E < 0$ omówimy za chwilę.

ZADANIE

- Jaka jest postać spinorów $\begin{pmatrix} \end{pmatrix}_{(+),\downarrow}$ i $\begin{pmatrix} \end{pmatrix}_{(+),\uparrow}$ w przybliżeniu nierelatywistycznym?
- Jaki jest ich sens fizyczny, gdy cząstka jest w spoczynku?
- Czy dla szybkiej cząstki (prędkość porównywalna z prędkością światła) powyższe dwa rozwiązania odpowiadają konkretnym wartościom rzutu spinu na oś „z”? Kiedy odpowiadają? W: należy rozważyć ruch wzdłuż osi „z”.

Rozwiązanie:

- W przybliżeniu nierelatywistycznym składowe χ_k znikają i rzut spinu cząstki na oś „z” jest określony.
- W spoczynku mamy to, co wyżej, już bez żadnych przybliżeń.
- $\chi \neq 0$ oznacza że $\xi^0 \neq \xi_0$. Zauważmy jednak, że gdy $p_x = p_y = 0$, $p_z \neq 0$, to wtedy stanom

$\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}_{(+),\downarrow}$ i $\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}_{(+),\uparrow}$ odpowiadają określone rzuty spinu na oś „z”: $+\frac{\hbar}{2}$ oraz $-\frac{\hbar}{2}$. Z wcześniejszych

rachunków wiemy, że tak musi być: cząstka, która najpierw spoczywa z określonym rzutem spinu na oś „z”, po nadaniu prędkości wzdłuż osi „z” nie przestaje mieć zadeklarowanego rzutu spinu na tę oś.

Inne rozwiązania dla danych E, \vec{p} różnią się od tych dwóch wyżej wymienionych stanem spinu cząstki.



Wróćmy do przypadku $E < 0$. Wypisując równanie Diraka skorzystaliśmy z tego, że współrzędne czteroprędkości cząstki spoczywającej są $(c,0,0,0)$ i w konwencji $c=1$ napisaliśmy $u^{ab}\xi_b = \xi^a$ albo $p^{ab}\xi_b = m\xi^a$.

Chcąc rozważać stany o ujemnej energii i chcąc napisać dla nich równanie Diraka musimy pogodzić się z tym, że wektor czteroprędkości spoczywającej cząstki o energii ujemnej ma współrzędne $(-c,0,0,0)$, czyli dla takiej cząstki $\xi^a = -\xi_a$. (Równocześnie jednak mamy wtedy $\xi^{\dot{a}} = \xi_a$, podczas gdy dla spoczywających cząstek o dodatniej energii było $\xi^{\dot{a}} = -\xi_a$ – zachodzi więc pełna symetria). Tak więc rozważanie energii ujemnej przetrzuca nas automatycznie do rozwiązań, które w spoczynku spełniają relację $\xi^a = -\xi_a$. Wybierając $E = E_- = -\sqrt{c^2\vec{p}^2 + m^2c^4}$ otrzymujemy kolejne dwa rozwiązania $\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}_{(-),\downarrow}$ oraz $\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}_{(-),\uparrow}$, które możemy wybrać w postaci

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}_{(-),\uparrow} = \begin{pmatrix} \frac{cp_z}{E_- - mc^2} \\ c(p_x + ip_y) \\ \frac{1}{E_- - mc^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}_{(-),\downarrow} = \begin{pmatrix} \frac{c(p_x - ip_y)}{E_- - mc^2} \\ cp_z \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Normalizacja rozwiązań standardowych.

Otrzymane wyżej rozwiązania, oglądane w konfiguracyjnej składowej H przestrzeni Hilberta, są falami płaskimi, więc w zwykłym sensie nie są normowalne. Można je unormować w sensie „jedna cząstka na jednostkę objętości”, czyli tak, aby

$$\Psi^+\Psi = (\bar{\varphi}_1 \quad \bar{\varphi}_2 \quad \bar{\chi}_1 \quad \bar{\chi}_2) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = 1.$$

Weźmy pierwszy stan: $N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E_+ + mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E_+ + mc^2} \end{pmatrix}$. Właściwą normalizację uzyskamy, gdy

$$N = \left(1 + \frac{c^2 \vec{p}^2}{(E_+ + mc^2)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \text{ Współczynnik } N \text{ dla pozostałych trzech stanów jest taki sam.}$$

ZADANIE

Czy określona przez nas norma stanu bispinorowego (jedna cząstka na jednostkę objętości) powinna być niezmiennikiem relatywistycznym?

Rozwiązanie:

Normalizacja „na jednostkę objętości” nie powinna być inwariantna: jeżeli w jakimś układzie odniesienia mamy jedną cząstkę na każdą jednostkę objętości, to w innym układzie normalizacja tego samego stanu będzie na ogół inna (na skutek lorentzowskiego skrócenia objętości). Wiąże się to z tym, że wszelka gęstość (czegokolwiek w trzech wymiarach) nie jest skalarem, tylko zerową składową czterowektora (czteroprądu tego czegoś: prawdopodobieństwa, ładunku, masy itp.).⁵

Jako przykład rozważmy stan swobodnej cząstki spoczywającej o energii (relatywistycznej) dodatniej, znormalizowany do jednej cząstki w jednostce objętości, ze spinem skierowanym „do góry” który w reprezentacji standardowej reprezentowany jest funkcją falową

$$\Psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}) e^{-\frac{i}{\hbar} Et} = e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)} N \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix},$$

z podstawieniem: $\vec{p} = 0, \quad E = mc^2, \quad N = 1, \quad \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (należy to sprawdzić).

⁵ Normalizacja nie zależy od wyboru reprezentacji (bazy) w przestrzeni $S \oplus \dot{S}$, bo wszystkie one (spinorowa, standardowa i inne) połączone są przekształceniami unitarnymi (macierzami unitarnymi A o wymiarach 4×4).

Mamy więc cząstki spoczywające, średnio jedną w jednostce objętości. Dokonajmy teraz transformacji Lorentza z punktu „a” w zadaniu na stronie 11, odpowiadającej skierowanej wzdłuż osi „z” szybkości względnej V układów odniesienia (nowy układ odniesienia porusza się z szybkością V w kierunku osi „z”).

Po takiej transformacji powinniśmy otrzymać funkcję falową znormalizowaną do $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ cząstek na

jednostkę objętości, bo tylokrotne jest skrócenie Lorentza. Sprawdźmy to.

Jak już wiemy, w wyniku rozważanej tu transformacji Lorentza współrzędne $\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ spinorów ulegają zmianie:

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \rightarrow U \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, \quad \text{czyli} \quad \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{-\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\varphi}{2}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \varepsilon^T U \varepsilon \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \text{czyli} \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\varphi}{2}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

gdzie $\operatorname{tgh} \varphi = \frac{V}{c}$.

Dowolna transformacja z grupy $SL(2, \mathbb{C})$, przetłumaczona do reprezentacji standardowej, ma postać:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \\ \chi'_1 \\ \chi'_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi'^1 \\ \xi'^2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & \varepsilon^T U \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} =$$

$$= A \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & \varepsilon^T U \varepsilon \end{pmatrix} A^{-1} A \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & \varepsilon^T U \varepsilon \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$$

gdzie

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

W naszym przypadku transformacja współrzędnych bispinora standardowego przebiega więc następująco:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \\ \chi'_1 \\ \chi'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{\varphi}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\varphi}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh \frac{\varphi}{2} & 0 & -\sinh \frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & \cosh \frac{\varphi}{2} & 0 & \sinh \frac{\varphi}{2} \\ -\sinh \frac{\varphi}{2} & 0 & \cosh \frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & \sinh \frac{\varphi}{2} & 0 & \cosh \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \frac{\varphi}{2} \\ 0 \\ -\sinh \frac{\varphi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kwadrat normy funkcji falowej (który przed transformacją wynosił 1) wynosi więc po transformacji

$$\begin{pmatrix} \overline{\varphi'_1} & \overline{\varphi'_2} & \overline{\chi'_1} & \overline{\chi'_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \\ \chi'_1 \\ \chi'_2 \end{pmatrix} = \cosh \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

czego należało oczekiwać, bo na skutek skrócenia Lorentza gęstość przestrzenna cząstek wzrosła

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \text{-krotnie.}$$

Należy podkreślić, że ten intuicyjnie oczekiwany wynik otrzymaliśmy tylko dzięki temu, że poddaliśmy transformacji Lorentza stan, w którym cząstki były początkowo nieruchome. Gdyby były ruchome, to zmiana normy bispinora byłaby inna. Na przykład przejście do układu odniesienia, który podążałby za ruchomymi cząstkami (jak w zadaniu poniżej) zmniejszy normę z powodu „zmniejszenia skrócenia Lorentza”.

ZADANIE

Sprawdź zmianę normy standardowej bispinorowej funkcji falowej, opisującej w układzie inercyjnym Σ cząstkę swobodną o energii dodatniej zmierzającą z szybkością v w kierunku osi „z”, po wykonaniu biernej transformacji Lorentza polegającej na przejściu do układu Σ' podążającego z szybkością V w tym samym kierunku.

Rozwiązanie:

Macierz przejścia w reprezentacji standardowej obliczyliśmy w poprzednim zadaniu:

$$L = \begin{pmatrix} \cosh \frac{\varphi}{2} & 0 & -\sinh \frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & \cosh \frac{\varphi}{2} & 0 & \sinh \frac{\varphi}{2} \\ -\sinh \frac{\varphi}{2} & 0 & \cosh \frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & \sinh \frac{\varphi}{2} & 0 & \cosh \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie } \operatorname{tgh} \varphi = \frac{V}{c}.$$

Współrzędne standardowe $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}_{(+), \uparrow}$ spinora mają przed transformacją postać: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp}{E + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix}$ (bo

składowe p_x i p_y są w tym przypadku równe zero). Arbitralnie przyjęliśmy $N = 1$ bo interesuje nas tylko zmiana normalizacji. Tak więc norma tego bispinora przed transformacją wynosi $\bar{\psi}\psi = 1 + \frac{c^2 p^2}{(E + mc^2)^2}$.

Między wartościami energii E i pędu p cząstek i ich szybkością v zachodzą znane z relatywistyki związki:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Po transformacji otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \\ \chi_1' \\ \chi_2' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \frac{\varphi}{2} - \frac{cp}{E + mc^2} \sinh \frac{\varphi}{2} \\ 0 \\ -\sinh \frac{\varphi}{2} + \frac{cp}{E + mc^2} \cosh \frac{\varphi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obliczenie stosunku norm jest żmudne i daje wynik

$$\frac{\bar{\psi}'\psi'}{\bar{\psi}\psi} = \frac{1 - \frac{vV}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{zauważmy, że położenie } v = 0 \text{ sprowadza nas do poprzedniego zadania}).$$

Rezultat ten powinniśmy teraz porównać ze zmianą normy oczekiwaną w związku ze zmianą skrócenia Lorentza: na wstępie mamy cząstki obserwowane z układu Σ poruszające się z szybkością v a po transformacji oglądamy te cząstki z układu Σ' , który porusza się za nimi z szybkością V względem układu Σ .

Szybkość v' cząstek obserwowaną z układu Σ' obliczamy stosując relatywistyczną regułę „składania” prędkości:

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}} \quad (\text{minusy pojawiły się dlatego, bo układ } \Sigma \text{ porusza się z szybkością } V \text{ w „ujemnym” kierunku osi „z” układu } \Sigma').$$

Z punktu widzenia skrócenia Lorentza rozważany stosunek norm $\frac{\bar{\psi}'\psi'}{\bar{\psi}\psi} = \frac{1 - \frac{vV}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ „powinien”

wynosić

$$\frac{\bar{\psi}'\psi'}{\bar{\psi}\psi} = \frac{1/\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}{1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{i tyle właśnie wynosi, co sprawdzamy podstawiając tu } v'.$$

Zauważmy, że pokrywając układ Σ' z układem spoczynkowym cząstek (czyli kładąc $V = v$) likwidujemy skrócenie Lorentza i otrzymujemy oczekiwany stosunek norm $\frac{\bar{\psi}'\psi'}{\bar{\psi}\psi} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$.



Współmienniczość równania Diraka względem transformacji Lorentza

Zapis fundamentalnych twierdzeń fizycznych, do których niewątpliwie należy równanie Diraka, powinien być taki sam we wszystkich inercjalnych układach odniesienia. Pozostaje nam sprawdzić, czy równanie Diraka spełnia ten warunek. Udowodnimy, że postać równania Diraka nie ulega zmianie przy przejściu od wyjściowego układu odniesienia Σ do innego inercjalnego układu odniesienia Σ' .

Jak już wiemy, zależny od czasu wektor stanu fizycznego, występujący w równaniu Diraka, należy do przestrzeni Hilberta $H \otimes (S \oplus \dot{S})$, będącej iloczynem tensorowym konfiguracyjnej przestrzeni Hilberta H i przestrzeni $S \oplus \dot{S}$ (dokładniej: wektor ten „wędruje” w tej przestrzeni, bo w obrazie Schrödingera, którym się tu posługujemy, zależy od czasu). Jeżeli w przestrzeni H wybrano bazę wektorów własnych operatora położenia a w przestrzeni $S \oplus \dot{S}$ bazę (na przykład) $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, |\alpha^1\rangle, |\alpha^2\rangle$, to najogólniejszy stan przynależny do $H \otimes (S \oplus \dot{S})$, będący superpozycją $\sum \left(\int |h\rangle \otimes |s\rangle \right)$ (gdzie $|h\rangle \in H$, $|s\rangle \in S \oplus \dot{S}$),

opisany jest funkcją falową $\begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \\ \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$ (x oznacza punkt w czasoprzestrzeni!). Występująca tu zależność od

zmiennych czasoprzestrzennych wywodzi się oczywiście z konfiguracyjnej przestrzeni Hilberta o czym już pisaliśmy w rozdziale o równaniu Diraka w mechanice kwantowej.

Jakie skutki dla macierzowo-funkcyjnej reprezentacji wektora stanu $\begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \\ \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$ pociągnie za sobą

zmiana układu odniesienia?

Wektor stanu $|\ \rangle$, którego reprezentację przytoczyliśmy, ma oczywiście postać:

$$|\ \rangle = |\psi_I(t)\rangle \otimes |\alpha_1\rangle + |\psi_{II}(t)\rangle \otimes |\alpha_2\rangle + |\psi_{III}(t)\rangle \otimes |\alpha^1\rangle + |\psi_{IV}(t)\rangle \otimes |\alpha^2\rangle,$$

gdzie

$$\psi^1(x) = \langle \bar{x} | \psi_I(t) \rangle, \quad \psi^2(x) = \langle \bar{x} | \psi_{II}(t) \rangle, \quad \psi_1(x) = \langle \bar{x} | \psi_{III}(t) \rangle, \quad \psi_2(x) = \langle \bar{x} | \psi_{IV}(t) \rangle$$

są zwykłymi funkcjami falowymi w reprezentacji położenia.

Zmiana inercjalnego układu odniesienia, powodująca w przestrzeni Minkowskiego zmianę (kontrawariantnych) współrzędnych czasoprzestrzennych wg przepisu⁶

$$x^{\mu'} = A^{\mu'}_{\nu} x^{\nu} \quad (\text{co w skrócie będziemy zapisywać w postaci } x' = Ax)$$

znajduje swoje odzwierciedlenie zarówno w składowej konfiguracyjnej jak i w składowej spinowej przestrzeni Hilberta.

* W składowej konfiguracyjnej transformacja Lorentza powoduje osobno zmianę każdej z czterech funkcji falowych $\psi(x)$ wg przepisu

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') \equiv \psi(A^{-1}x');$$

* W składowej spinowej następuje znana nam już zmiana bazy złożonej z czterech spinorów $|\alpha\rangle$.

Po przejściu do nowego układu odniesienia zamiast reprezentującej dany stan fizyczny macierzy

$$\begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \\ \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \text{ otrzymamy więc}$$

$$\begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \\ \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \psi^{1'}(x') \\ \psi^{2'}(x') \\ \psi_1'(x') \\ \psi_2'(x') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & \varepsilon^T \bar{U} \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^1(A^{-1}x') \\ \psi^2(A^{-1}x') \\ \psi_1(A^{-1}x') \\ \psi_2(A^{-1}x') \end{pmatrix} \equiv S \begin{pmatrix} \psi^1(A^{-1}x') \\ \psi^2(A^{-1}x') \\ \psi_1(A^{-1}x') \\ \psi_2(A^{-1}x') \end{pmatrix}$$

Macierz kwadratową 4×4 występującą w tym wzorze, zgodnie ze zwyczajem oznaczyliśmy symbolem S (bez związku z oznaczeniem przestrzeni spinorów).

⁶ Reguły transformacyjne dla składowych kontrawariantnych i kowariantnych omawiane są w *Dodatku 1*.

Analogiczna zależność opisze transformację odwrotną, od układu Σ' do układu Σ :

$$\begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \\ \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon^T \overline{U^{-1}} \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^{1'}(Ax) \\ \psi^{2'}(Ax) \\ \psi_1'(Ax) \\ \psi_2'(Ax) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \psi^{1'}(x') \\ \psi^{2'}(x') \\ \psi_1'(x') \\ \psi_2'(x') \end{pmatrix}.$$

Macierz funkcyjna $\begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \\ \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$ spełnia równanie Diraka (na początek rozważymy przypadek cząstki

swobodnej):

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc) \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \\ \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = 0 \quad \left(\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right).$$

Podstawiamy tu kolumnę $\begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \\ \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$ wyrażoną wyżej przez $\begin{pmatrix} \psi^{1'}(x') \\ \psi^{2'}(x') \\ \psi_1'(x') \\ \psi_2'(x') \end{pmatrix}$ i mnożymy z lewej strony przez

macierz S otrzymując:

$$(i\hbar S\gamma^\mu S^{-1}\partial_\mu - mc) \begin{pmatrix} \psi^{1'}(x') \\ \psi^{2'}(x') \\ \psi_1'(x') \\ \psi_2'(x') \end{pmatrix} = 0.$$

Pozostaje już tylko wyrazić pochodne po zmiennych x przez pochodne po zmiennych x' :

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} = A^{\nu'}{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^{\nu'}},$$

co daje ostatecznie

$$(i\hbar S\gamma^\mu S^{-1}A^{\nu'}{}_\mu\partial_{\nu'} - mc) \begin{pmatrix} \psi^{1'}(x') \\ \psi^{2'}(x') \\ \psi_1'(x') \\ \psi_2'(x') \end{pmatrix} = 0.$$

Jeżeli udowodnimy, że dla każdej transformacji Lorentza komplet czterech macierzy $S\gamma^\mu S^{-1}A^\nu{}_\mu$ (sumowanie po wskaźniku μ) dla $\nu = 0,1,2,3$ pokrywa się z kompletem macierzy γ^ρ dla $\rho = 0,1,2,3$, to wykazemy współzmienniczość równania Diraka względem transformacji Lorentza.

ZADANIE

Przeprowadź odpowiedni dowód dla transformacji wymienionych w punktach „a” i „b” w zadaniu na stronie 4.

Rozwiązanie:

Ad „a”:

$$U = \begin{pmatrix} e^{-\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{\varphi/2} \end{pmatrix}, \quad \text{czyli} \quad S = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & \varepsilon^T U \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\varphi/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\varphi/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\varphi/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\varphi/2} \end{pmatrix}.$$

Macierz A ma w tym przypadku postać (por. zadanie na stronie 4):

$$A = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & 0 & 0 & -\sinh \varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \varphi & 0 & 0 & \cosh \varphi \end{pmatrix}.$$

Wystarczy teraz sprawdzić, że zachodzą związki

$$S\gamma^\mu S^{-1}A^0{}_\mu = \gamma^0, \quad S\gamma^\mu S^{-1}A^1{}_\mu = \gamma^1, \quad S\gamma^\mu S^{-1}A^2{}_\mu = \gamma^2, \quad S\gamma^\mu S^{-1}A^3{}_\mu = \gamma^3.$$

Podobnie postępujemy w przypadku obrotu wokół osi „z”. Macierz U ma w tym przypadku postać

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{pmatrix}, \quad \text{a macierz } A \text{ ma postać}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Skretność

Na poziomie klasycznym ustaliliśmy, że poruszająca się cząstka może mieć określony rzut spinu na oś „z”, jeżeli porusza się do niej równolegle. Kwantowy odpowiednik tego stwierdzenia odnajdujemy w znikaniu komutatora operatora Hamiltona z tzw. operatorem skretności $\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}$

$$[\hat{H}, \vec{\Sigma} \cdot \hat{p}] = 0,$$

gdzie operator $\vec{\Sigma}$, określony w reprezentacji spinorowej, ma postać

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix},$$

czyli operator skrętności odpowiada rzutowi spinu na wektor pędu. Znikanie komutatora oznacza jak zwykle, że operator skrętności i operator Hamiltona mają komplet wspólnych stanów własnych.

ZADANIE

W oparciu o uniwersalne relacje komutacji dla macierzy α^k i γ^μ sprawdź znikanie komutatora dirakowskiego hamiltonianu cząstki swobodnej i operatora skrętności.

W tym celu należy pokazać, że $\vec{\Sigma} = -\vec{\alpha}\gamma^5$ gdzie $\gamma^5 \equiv -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

Przed rozwiązaniem tego zadania należy udowodnić związek $[\gamma^5, \gamma^\mu]_+ = 0$ (**macierz γ^5 antykomutuje macierzami γ^μ**). Ze związku tego wynika natychmiast, że **macierz γ^5 komutuje z macierzami α** , bo te ostatnie są iloczynami dwóch macierzy γ .

Rozwiązanie:

Obliczymy macierz γ^5 w reprezentacjach spinorowej i standardowej:

$$\begin{aligned} \gamma^5_{sp} &= -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -i \begin{pmatrix} \sigma^1\sigma^2\sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^1\sigma^2\sigma^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bo

$$\sigma^1\sigma^2\sigma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -iI.$$

To pozwala nam obliczyć drugą macierz:

$$\gamma^5_{st} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Sprawdźmy, czy istotnie operator $\vec{\Sigma}$ zaproponowany w temacie zadania ma w reprezentacji spinorowej pożądaną postać $\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$:

$$\vec{\Sigma}_{sp} = -\vec{\alpha}_{sp}\gamma^5_{sp} = -\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Przy okazji obliczmy $\vec{\Sigma}_{st}$:

$$\vec{\Sigma}_{st} = -\vec{\alpha}_{st} \gamma^5_{st} = -\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Zwróćmy uwagę na to, że macierz $\vec{\Sigma}$ jest taka sama w reprezentacji spinorowej i standardowej. Jest to rezultatem specyficznego mieszania spinorów bazowych w przestrzeni $S \oplus \dot{S}$ przy przechodzeniu od reprezentacji spinorowej do standardowej.

Sprawdzamy znikanie antykomutatora $[\gamma^5, \gamma^\mu]_+$:

$$[\gamma^5, \gamma^\mu]_+ = -i(\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3).$$

W drugim składniku w nawiasie przenosimy macierz γ^μ na koniec. Niezależnie od tego, ile wynosi μ , spowoduje to trzykrotną zmianę znaku tego składnika (bo macierz γ^μ będzie „po drodze” trzy razy antykomutować a raz komutować z czynnikami tego składnika). Dlatego otrzymamy

$$[\gamma^5, \gamma^\mu]_+ = -i(\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^\mu + (-1)^3 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^\mu) \equiv 0.$$

Wynika z tego, że $[\gamma^5, \alpha^i] = 0$, bo

$$[\gamma^5, \alpha^i] = [\gamma^5, \gamma^0 \gamma^i] = \gamma^5 \gamma^0 \gamma^i - \gamma^0 \gamma^i \gamma^5 = 0$$

ponieważ w drugim składniku możemy przenieść γ^5 przed macierz γ^0 zmieniając znak dwukrotnie, czyli bez zmiany znaku.

Obliczamy komutator $[\hat{H}, \vec{\Sigma} \cdot \vec{p}]$:

$$[\hat{H}, \vec{\Sigma} \cdot \vec{p}] = -[(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m), \vec{\alpha} \gamma^5 \cdot \vec{p}] = -[\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \gamma^5] - m[\beta, \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \gamma^5] = 0,$$

bo obydwa komutatory znikają:

- pierwszy komutator

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \gamma^5] = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \gamma^5 - \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \gamma^5 \vec{\alpha} \cdot \vec{p} = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} [\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \gamma^5] = 0,$$

bo komutatory macierzy γ^5 z macierzami α znikają,

- drugi komutator:

$$-\frac{1}{i} [\beta, \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \gamma^5] = -\frac{1}{i} [\beta, \vec{\alpha} \gamma^5] \cdot \vec{p} = 0,$$

bo

$$-\frac{1}{i}[\beta, \alpha^k \gamma^5] = [\gamma^0, \gamma^0 \gamma^k \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3] = 0.$$

ZADANIE

Udowodnij, że w każdej reprezentacji zachodzi $\gamma^5 \gamma^5 = I$.

ZADANIE

Udowodnij, że trójka operatorów $\frac{\hbar}{2} \vec{\Sigma}$ spełnia zwykłe relacje komutacji oczekiwane od składowych operatora momentu pędu.

Rozwiązanie:

Naszym celem jest udowodnienie, że $\frac{\hbar^2}{4} [\Sigma_i, \Sigma_j] = i \epsilon_{ijk} \frac{\hbar}{2} \Sigma_k$. Związek ten jest trywialny dla $i = j$.

Dla $i \neq j$ skorzystamy z konkretnej reprezentacji operatora $\vec{\Sigma}$ (np. standardowej lub spinorowej, co jest wystarczające dla kompletności dowodu, bo dowodzony związek jest jawnie niezmienniczy względem unitarnych przekształceń bazy w przestrzeni $S \oplus \dot{S}$).

$$\frac{\hbar^2}{4} [\Sigma_i, \Sigma_j] = \frac{\hbar^2}{4} \left[\begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix} \right] = \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} [\sigma_i, \sigma_j] & 0 \\ 0 & [\sigma_i, \sigma_j] \end{pmatrix} = i \epsilon_{ijk} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix},$$

c.b.d.o.

ZADANIE

W reprezentacjach standardowej i spinorowej znajdź wspólne stany własne operatorów \hat{H} , \hat{p} , $\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}$ odpowiadające dodatniej energii.

Rozwiązanie:

Używając reprezentacji standardowej wyodrębniliśmy z przestrzeni Hilberta dwuwymiarową podprzestrzeń degeneracji złożoną ze wspólnych stanów własnych komutujących operatorów \hat{H} i \hat{p} do wartości własnych – odpowiednio – E i \vec{p} . Przestrzeń ta napięta jest na stanach reprezentowanych przez kolumny $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_{(+),\downarrow}$ oraz $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_{(+),\uparrow}$ i jest iloczynem tensorowym jednowymiarowej przestrzeni wziętej z przestrzeni konfiguracyjnej H (napiętej na wektorze $|\vec{p}\rangle$, któremu w bazie $\{|\vec{x}\rangle\}$ odpowiada funkcja $\exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}\right)$) oraz dwuwymiarowej podprzestrzeni wyjętej z $S \oplus \dot{S}$. Z tego, że hermitowski operator $\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}$ komutuje z operatorami \hat{H} i \hat{p} wynika, że w tej dwuwymiarowej podprzestrzeni muszą istnieć dwa prostopadłe wektory własne operatora $\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}$.

Piszemy więc równanie własne⁷

$$\begin{aligned} & \vec{\Sigma} \cdot \vec{p} \left[a \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_{(+),\uparrow} + b \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_{(+),\downarrow} \right] \\ = & \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y & 0 & 0 \\ p_x + ip_y & -p_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_z & p_x - ip_y \\ 0 & 0 & p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \left[a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E_+ + mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E_+ + mc^2} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x - ip_y)}{E_+ + mc^2} \\ \frac{-cp_z}{E_+ + mc^2} \end{pmatrix} \right] \\ = & \lambda \left[a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E_+ + mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E_+ + mc^2} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x - ip_y)}{E_+ + mc^2} \\ \frac{-cp_z}{E_+ + mc^2} \end{pmatrix} \right], \end{aligned}$$

na podstawie którego obliczamy związki

$$\begin{aligned} ap_z + b(p_x - ip_y) &= \lambda a, \\ a(p_x + ip_y) - bp_z &= \lambda b, \end{aligned}$$

co daje wartości własne $\lambda_1 = |\vec{p}| \equiv p$, $\lambda_2 = -p$. Pierwsza odpowiada oczywiście spinowi równoległemu do \vec{p} , druga antyrównoległemu.

Dla $\lambda_1 = p$ otrzymujemy

$$b = \frac{a(p - p_z)}{(p_x - ip_y)},$$

⁷ Związki te można zapisać w postaci macierzowej $\begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. czyli z pozoru

czterowymiarowy problem własny przyjął zapis dwuwymiarowego problemu własnego, co nie zaskakuje: wektorów własnych operatora skrzętności poszukujemy wszak w dwuwymiarowej podprzestrzeni degeneracji

operatora Hamiltona. Macierz $\begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}$ jest po prostu reprezentacją operatora $\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}$ w bazie

(unormowanych!) wektorów $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_{(+),\downarrow}$ oraz $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_{(+),\uparrow}$, co warto sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. Kolumny

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ to współrzędne poszukiwanych wektorów własnych operatora skrzętności, w tej samej bazie.

czyli po unormowaniu $a = \sqrt{\frac{p + p_z}{2p}}$, $b = \frac{p_x + ip_y}{\sqrt{2p(p + p_z)}}$.

Dla $\lambda_1 = -p$ otrzymujemy

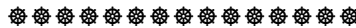
$$a = -\frac{b(p_x - ip_y)}{p + p_z},$$

czyli po unormowaniu

$$a = -\frac{p_x - ip_y}{\sqrt{2p(p + p_z)}}, \quad b = \sqrt{\frac{p + p_z}{2p}}.$$

Uwaga: normowaliśmy tak, by $|a|^2 + |b|^2 = 1$; chcąc więc uzyskać unormowane stany własne operatora skrętności należy brać kombinacje liniowe unormowanych stanów $\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}_{(+),\downarrow}$ i $\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}_{(+),\uparrow}$.

Warto zauważyć, że gdy pęd skierowany jest wzdłuż osi „z”, to poszukiwane stany pokrywają się ze stanami $\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}_{(+),\downarrow}$ i $\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}_{(+),\uparrow}$, czego należało oczekiwać.



Reprezentacja Foldy-Wouthuysena

W reprezentacji standardowej wypisaliśmy cztery ortogonalne bispinory napinające przestrzeń $S \oplus \dot{S}$. Pierwsze dwa napinają dwuwymiarową podprzestrzeń odpowiadającą energiom dodatnim, drugie dwa napinają podprzestrzeń ortogonalną do tej pierwszej, odpowiadającą energiom ujemnym. Suma prosta tych dwóch podprzestrzeni daje całą przestrzeń $S \oplus \dot{S}$.

Łatwo sprawdzić, że podział przestrzeni $S \oplus \dot{S}$ na sumę prostą tych dwóch dopełniających się podprzestrzeni zależy od wartości czteropędu cząstki. Wystarczy rozważyć bispinory $\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}_{(+),\downarrow}$ oraz $\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}_{(+),\uparrow}$ dla przypadku $p_x = p_y = 0$ i sprawdzić, co się dzieje, gdy na przykład zmieniamy energię. Niech więc $p_x = p_y = 0$, $E^2 - p_z^2 = m^2$, $p_z = \sqrt{E^2 - m^2}$. W takim przypadku

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}_{(+),\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E_+ + m} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{E_+ - m}{E_+ + m}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}_{(+),\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-p_z}{E_+ + m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\sqrt{\frac{E_+ - m}{E_+ + m}} \end{pmatrix}.$$

Jeżeli teraz zmienimy energię E , to widać, że na przykład nowy „pierwszy” bispinor nie będzie już kombinacją liniową starych bispinorów $\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}_{(+),\downarrow}$ i $\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}_{(+),\uparrow}$: będzie należał do innej dwuwymiarowej podprzestrzeni odpowiadającej nowemu czteropędowi.

Tak więc jak długo będziemy opisywać obiekt o zadanym czteropędzie i zmieniać tylko jego „stan spinowy”, tak długo będziemy wykorzystywać tylko pewną dwuwymiarową podprzestrzeń przestrzeni $S \oplus \dot{S}$

- spinor dałoby się wtedy opisać kolumną dwukomponentową zamiast czterekomponentowej. Kłopot polega jednak na tym, że dla innego czteropędu baza $\left\{ \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}_{(+),\downarrow}, \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}_{(+),\uparrow} \right\}$ napnie inną podprzestrzeń przestrzeni $S \oplus \dot{S}$. Chcąc więc na przykład rozważyć pakiet falowy (superpozycję fal płaskich odpowiadających różnym pędom) nie będziemy mogli ograniczyć się do jakiejś konkretnej 2-wymiarowej podprzestrzeni w $S \oplus \dot{S}$ – będziemy penetrować wszystkie cztery wymiary z $S \oplus \dot{S}$, czyli spinor będzie musiał pozostać czterekomponentowy.

Reprezentacja F-W pozwala stosować dwukomponentowy opis spinora pomimo opisanych wyżej trudności.

Wstawka:

KONSTRUOWANIE BAZY W ILOCZYNNIE TENSOROWYM DWÓCH PRZESTRZENI WEKTOROWYCH.

✿

We wstawce na stronie 2 pokazaliśmy najbardziej naturalny sposób otrzymania bazy w iloczynie tensorowym. Reprezentacja F-W polega na zastosowaniu nieco bardziej wyrafinowanej metody, którą teraz opisujemy.

✿

Założmy, że mamy dwie przestrzenie wektorowe H i S , które mnożymy tensorowo.

W pierwszej przestrzeni mamy wybraną ortonormalną bazę $|p_1\rangle, |p_2\rangle \dots |p_m\rangle$.

W drugiej wybieramy dowolną bazę ortonormalną $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle \dots |\alpha_n\rangle$ i rozważamy ciąg wektorów $|p_1\rangle \otimes |\alpha_1\rangle, |p_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle, \dots, |p_1\rangle \otimes |\alpha_n\rangle$. Zbudowaliśmy „jedną m-tą część” bazy w $H \otimes S$. Nie ma jednak żadnego powodu, aby resztę wektorów bazowych budować wg. zwykłego schematu $|p_2\rangle \otimes \{|\alpha_k\rangle\}$ itd. Dla wektora $|p_2\rangle$ można bowiem wybrać dowolną inną ortonormalną bazę w przestrzeni S . Każdy wektor $|p_1\rangle$ można łączyć z inną bazą w przestrzeni S . Otrzymana w ten sposób baza będzie również ortonormalną bazą w $H \otimes S$ (warto sprawdzić).

Baza w reprezentacji F-W budowana jest tak, jak w powyższym przykładzie. Każdy wektor bazowy $|\vec{p}\rangle$ z przestrzeni konfiguracyjnej H wiążemy z dwoma bispinorami napinającymi przypisaną mu dodatnioenergetyczną podprzestrzeń w $S \oplus \dot{S}$ (nazwijmy ją S_+) i dwoma napinającymi tę dopełniającą, ujemnoenergetyczną S_- . Oczywiście $S \oplus \dot{S} \equiv S_+ \oplus S_-$. W ten sposób każdemu pakietowi zawierającemu tylko (przykładowo) dodatnie energie odpowiada bispinor, którego dwie składowe automatycznie równe są zeru – opis bispinora staje się praktycznie dwukomponentowy.

W zapisie symbolicznym wygląda to tak:

Wektor stanu z przestrzeni $H \otimes (S \oplus \dot{S})$, będący (w sensie konfiguracyjnym) pakietem falowym, ma ogólną postać

$$\int d^3 p \left\{ |\vec{p}, t\rangle \otimes \left[\varphi_1(E, \vec{p}) |\varphi_1\rangle + \varphi_2(E, \vec{p}) |\varphi_2\rangle + \chi_1(E, \vec{p}) |\chi_1\rangle + \chi_2(E, \vec{p}) |\chi_2\rangle \right] \right\},$$

gdzie dla danego pędu \vec{p} i dla danego znaku energii (na przykład dodatniego – nie miesza się w pakiecie fal o różnych znakach energii) cztery funkcje $\varphi_1, \varphi_2, \chi_1, \chi_2$ tworzą kolumnę będącą jakąś kombinacją liniową kolumn $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}_{(+),\downarrow}$ i $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}_{(+),\uparrow}$ ze współczynnikami zależnymi od pędu. Na razie w przestrzeni $H \otimes (S \oplus \dot{S})$ mamy więc bazę złożoną z wektorów $|\vec{p}\rangle \otimes |\varphi_1\rangle, |\vec{p}\rangle \otimes |\varphi_2\rangle, |\vec{p}\rangle \otimes |\chi_1\rangle, |\vec{p}\rangle \otimes |\chi_2\rangle$ („po kolei” dla wszystkich $|\vec{p}\rangle$). Zamiast tej bazy użyjemy teraz bazy

$$|\vec{p}\rangle \otimes \hat{U}(\vec{p})|\varphi_1\rangle, \quad |\vec{p}\rangle \otimes \hat{U}(\vec{p})|\varphi_2\rangle, \quad |\vec{p}\rangle \otimes \hat{U}(\vec{p})|\chi_1\rangle, \quad |\vec{p}\rangle \otimes \hat{U}(\vec{p})|\chi_2\rangle,$$

gdzie unitarny i zależny od pędu operator $\hat{U}(\vec{p})$ każdorazowo (tzn. dla każdego \vec{p} osobno) zamienia wektory $|\varphi_1\rangle$ i $|\varphi_2\rangle$ na dwa inne napinające właściwą dla danego pędu podprzestrzeń S_+ a wektory $|\chi_1\rangle$ i $|\chi_2\rangle$ na dwa napinające przestrzeń S_- . Wektor stanu zapisany w nowej bazie przyjmie postać

$$\int |\vec{p}, t\rangle d^3 p \otimes [\varphi'_1(\vec{p})\hat{U}|\varphi_1\rangle + \varphi'_2(\vec{p})\hat{U}|\varphi_2\rangle + \chi'_1(\vec{p})\hat{U}|\chi_1\rangle + \chi'_2(\vec{p})\hat{U}|\chi_2\rangle].$$

W języku reprezentacji zapisowi ze stałą bazą odpowiada funkcja falowa

$$\Psi(\vec{x}, t) = \int d^3 p e^{-\frac{i}{\hbar} p x} \begin{pmatrix} \varphi_1(\vec{p}) \\ \varphi_2(\vec{p}) \\ \chi_1(\vec{p}) \\ \chi_2(\vec{p}) \end{pmatrix} \quad (\text{bo } \langle \vec{x} | \vec{p}, t \rangle = e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} e^{-\frac{i}{\hbar} E t})$$

a zapisowi z "ruchomą" bazą w $S \oplus \dot{S}$ odpowiada funkcja falowa

$$\Psi'(\vec{x}, t) = \int d^3 p e^{-\frac{i}{\hbar} p x} U(\vec{p}) \begin{pmatrix} \varphi_1(\vec{p}) \\ \varphi_2(\vec{p}) \\ \chi_1(\vec{p}) \\ \chi_2(\vec{p}) \end{pmatrix} = \int d^3 p U(\hat{\vec{p}}) e^{-\frac{i}{\hbar} p x} \begin{pmatrix} \varphi_1(\vec{p}) \\ \varphi_2(\vec{p}) \\ \chi_1(\vec{p}) \\ \chi_2(\vec{p}) \end{pmatrix},$$

gdzie $U(\vec{p})$ jest macierzą liczbową 4x4, której związek z operatorem $\hat{U}(\vec{p})$ jest standardowy: jeżeli baza $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle$ przekształcana jest unitarnym operatorem $\hat{U}(\vec{p})$, to kolumna współrzędnych

$\begin{pmatrix} \varphi_1(\vec{p}) \\ \varphi_2(\vec{p}) \\ \chi_1(\vec{p}) \\ \chi_2(\vec{p}) \end{pmatrix}$ podlega działaniu odpowiedniej unitarnej macierzy liczbowej $U(\vec{p})$. Występująca zaś w powyższym wzorze macierz operatorowa $U(\hat{\vec{p}})$ powstaje z macierzy $U(\vec{p})$, gdy na miejsce przeznaczone dla liczb (p_x, p_y, p_z) wstawimy do niej trzy operatory $-i\hbar(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$.

Sprawdźmy, że zakreślony wyżej program jest realizowany macierzą operatorową $U(\hat{\vec{p}})$ postaci

$$U(\hat{\vec{p}}) = \frac{\beta \hat{H} + E_+}{\sqrt{2E_+(E_+ + m)}},$$

gdzie

$$\hat{H} = \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta m,$$

$$E_+ \equiv +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} .$$

ZADANIE

Sprawdź, że macierz $U(\vec{p})$ jest unitarna.

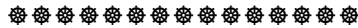
Rozwiązanie:

$$U = \frac{\beta(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) + E_+}{\sqrt{2E_+(E_+ + m)}} .$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} 2E_+(E_+ + m)U^+U &= [\beta(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) + E_+]^+ [\beta(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) + E_+] \\ &= (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}\beta + m + E_+)(\beta\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m + E_+) \\ &= (\vec{\alpha} \cdot \vec{p})^2 + (E_+ + m)(\vec{\alpha} \cdot \vec{p}\beta + \beta\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) + (E_+ + m)^2 \\ &= (\vec{\alpha} \cdot \vec{p})^2 + (E_+ + m)^2 = (\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z)^2 + (E_+ + m)^2 \\ &= p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + (\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x) p_x p_y + \dots + (E_+ + m)^2 \\ &= \vec{p}^2 + (E_+ + m)^2 = E_+^2 - m^2 + (E_+ + m)^2 = 2E_+(E_+ + m), \end{aligned}$$

c.b.d.o.



Należy teraz sprawdzić, czy istotnie operatorowa macierz $U(\hat{p})$ ma pożądane własności. Jako bazy wyjściowej użyliśmy bazy standardowej, w której macierz $U(\hat{p})$ ma postać

$$U(\hat{p})_{st} = [2E_+(E_+ + m)]^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \hat{H} + E_+ & 0 \\ 0 & -\hat{H} + E_+ \end{pmatrix} .$$

Widać teraz, że macierz U , działając na stan o dodatniej energii wyrażony kolumną standardową, wyprodukuje kolumnę z zerami na miejscu trzecim i czwartym a działając na stan o energii ujemnej przekształci reprezentującą go kolumnę na inną, z zerami na miejscach pierwszym i drugim.

ZADANIE

Podziałaj macierz U na cztery kolumny standardowe oznaczone wcześniej przez $()_{(+),\uparrow}$, $()_{(+),\downarrow}$, $()_{(-),\uparrow}$ oraz $()_{(-),\downarrow}$. Zinterpretuj wyniki.

Rozwiązanie:

Po trywialnym rachunku dostajemy:

$$U \left(\begin{matrix} \\ (+), \uparrow \end{matrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U \left(\begin{matrix} \\ (+), \downarrow \end{matrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U \left(\begin{matrix} \\ (-), \uparrow \end{matrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U \left(\begin{matrix} \\ (-), \downarrow \end{matrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

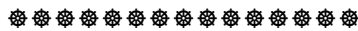
Wynika z tego, że reprezentacja F-W wybiera właśnie stany $\left(\begin{matrix} \\ (+), \downarrow \end{matrix} \right)$, $\left(\begin{matrix} \\ (+), \uparrow \end{matrix} \right)$, $\left(\begin{matrix} \\ (-), \downarrow \end{matrix} \right)$ oraz $\left(\begin{matrix} \\ (-), \uparrow \end{matrix} \right)$ jako bazowe w $S \oplus \dot{S}$.

ZADANIE

Udowodnij, że wynikające z równania Diraka równanie ciągłości ma postać:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Psi^+ \Psi) = -\text{div}(c \Psi^+ \vec{\alpha} \Psi).$$

(Należy napisać równanie Diraka dla Ψ w postaci $\frac{\partial}{\partial t} \Psi = \dots$ i pomnożyć je z lewej strony przez wiersz Ψ^+ . Analogiczne równanie dla Ψ^+ trzeba pomnożyć z prawej strony przez kolumnę Ψ . Otrzymane wzory dodać stronami.)



Granica nierelatywistyczna równania Diraka dla cząstki w polu elektromagnetycznym. Anomalny moment magnetyczny elektronu.

Równanie Diraka, uwzględniające elektromagnetyczne oddziaływanie elektronu z polem zewnętrznym, rozważać będziemy pod kątem jego zastosowania do opisu stanów związanych elektronu.

Na początek porównamy równanie Diraka ze zwykłym, nierelatywistycznym równaniem Schrödingera. W tym celu równanie Diraka dla cząstki w polu elektromagnetycznym

$$\left[\gamma^\mu (\hat{p}_\mu - eA_\mu) - mc \right] \Psi(x) = 0$$

pomnożymy z lewej strony przez γ^0 otrzymując

$$\left[\frac{1}{c} \hat{E} - \frac{e}{c} \phi - \vec{\alpha} \cdot (\hat{\vec{p}} - e\vec{A}) - mc\beta \right] \Psi = 0,$$

czyli

$$\left[\hat{E} - e\phi - c\vec{\alpha} \cdot (\hat{\vec{p}} - e\vec{A}) - mc^2\beta \right] \Psi = 0,$$

gdzie cztery współrzędne A^μ to $\left(\frac{\varphi}{c}, \vec{A}\right)$.

Pomnóżmy to równanie z lewej strony przez operator $\hat{E} - e\varphi + c\vec{\alpha} \cdot (\hat{\vec{p}} - e\vec{A}) + mc^2\beta$. Otrzymamy

$$\left\{ (\hat{E} - e\varphi)^2 - c^2 [\vec{\alpha} \cdot (\hat{\vec{p}} - e\vec{A})]^2 - m^2 c^4 - c(\hat{E} - e\varphi)\vec{\alpha} \cdot (\hat{\vec{p}} - e\vec{A}) + c\vec{\alpha} \cdot (\hat{\vec{p}} - e\vec{A})(\hat{E} - e\varphi) \right\} \Psi = 0.$$

ZADANIE

Udowodnij, że dla reprezentacji standardowej i dla operatorów \vec{B} i \vec{C} spełniających

$$[\vec{\alpha}, \vec{B}] = [\vec{\alpha}, \vec{C}] = 0$$

(operatory \vec{B} i \vec{C} nie muszą komutować) zachodzi

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{B})(\vec{\alpha} \cdot \vec{C}) = \vec{B} \cdot \vec{C} + i\vec{\Sigma} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}),$$

gdzie oznaczyliśmy $\vec{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$.

W: Skorzystaj z tego, że $\sigma_k \sigma_j = \delta_{kj} I + i\epsilon_{kjl} \sigma_l$.

Z zadania wynika, że

$$[\vec{\alpha} \cdot (\hat{\vec{p}} - e\vec{A})]^2 = (\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2 + i\vec{\Sigma} \cdot (\hat{\vec{p}} - e\vec{A}) \times (\hat{\vec{p}} - e\vec{A}).$$

Łatwo pokazać, że

$$\begin{aligned} \left\{ (\hat{\vec{p}} - e\vec{A}) \times (\hat{\vec{p}} - e\vec{A}) \right\}_m &= -e(\hat{\vec{p}} \times \vec{A} + \vec{A} \times \hat{\vec{p}})_m = i\hbar e(\vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{\nabla})_m \\ &= i\hbar e(\partial_k A^l \epsilon_{klm} + A^k \partial_l \epsilon_{klm}) = i\hbar e(\text{rot} \vec{A})_m = i\hbar e(\vec{B})_m, \end{aligned}$$

bo

$$\partial_k A^l \epsilon_{klm} = (\partial_k A^l) \epsilon_{klm} + A^l \partial_k \epsilon_{klm},$$

czyli

$$[\vec{\alpha} \cdot (\hat{\vec{p}} - e\vec{A})]^2 = (\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2 - \hbar e \vec{\Sigma} \cdot \vec{B}.$$

Ostatnie dwa operatory dają

$$\begin{aligned} &-c(\hat{E} - e\varphi)\vec{\alpha} \cdot (\hat{\vec{p}} - e\vec{A}) + c\vec{\alpha} \cdot (\hat{\vec{p}} - e\vec{A})(\hat{E} - e\varphi) \\ &= ce\vec{\alpha} \cdot [\hat{E}, \vec{A}] + ce\vec{\alpha} \cdot [\varphi, \hat{\vec{p}}] = ice\hbar\vec{\alpha} \cdot [\partial_i, \vec{A}] + ice\hbar\vec{\alpha} \cdot [\vec{\nabla}, \varphi] \\ &= ice\hbar\vec{\alpha} \cdot \partial_i \vec{A} + ice\hbar\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \varphi = -ice\hbar\vec{\alpha} \cdot (-\vec{\nabla} \varphi - \partial_i \vec{A}) = -iehc\vec{\alpha} \cdot \vec{E}. \end{aligned}$$

Otrzymujemy więc równanie

$$\left[(\hat{E} - e\varphi)^2 - c^2(\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2 - m^2c^4 + e\hbar c^2 \vec{\Sigma} \cdot \vec{B} - ie\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{E} \right] \Psi(x) = 0.$$

Operator energii \hat{E} odpowiada pełnej relatywistycznej energii E :

$$E = mc^2 + E'.$$

Dla pierwszego i trzeciego składnika w nawiasie kwadratowym dokonamy przybliżenia:

$$\begin{aligned} (\hat{E} - e\varphi)^2 - m^2c^4 &= (mc^2 + \hat{E}' - e\varphi)^2 - m^2c^4 \\ &= 2mc^2(\hat{E}' - e\varphi) + (\hat{E}' - e\varphi)^2 \approx 2mc^2(\hat{E}' - e\varphi) \end{aligned}$$

polegającego na zaniedbaniu drugiego składnika przed znakiem przybliżonej równości. Jest to uzasadnione tym, że $E' - e\varphi \ll 2mc^2$ (przybliżoną równość operatorową należy rozumieć w sensie słabym, czyli w sensie podobnego działania operatorów na funkcje odpowiadające sytuacjom fizycznym, w których spełniona jest powyższa nierówność). W dalszych rachunkach znak przybliżonej równości zastąpimy równością zwykłą. Mamy więc

$$2mc^2(\hat{E}' - e\varphi)\Psi(x) = \left[c^2(\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2 - e\hbar c^2 \vec{\Sigma} \cdot \vec{B} + ie\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{E} \right] \Psi(x),$$

czyli

$$\hat{E}'\Psi(x) = \left[\frac{1}{2m}(\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2 + e\varphi - \frac{e\hbar}{2m} \vec{\Sigma} \cdot \vec{B} + \frac{ie\hbar}{2mc} \vec{\alpha} \cdot \vec{E} \right] \Psi(x),$$

gdzie operator \hat{E}' ma postać $\hat{E}' = i\hbar\partial_t - mc^2$. Jeżeli teraz dokonamy podstawienia $\Psi = e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t} \Psi'$, to otrzymamy równanie

$$i\hbar\partial_t\Psi'(x) = \left[\frac{1}{2m}(\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2 + e\varphi - \frac{e\hbar}{2m} \vec{\Sigma} \cdot \vec{B} + \frac{ie\hbar}{2mc} \vec{\alpha} \cdot \vec{E} \right] \Psi'(x),$$

które przypomina nierelatywistyczne równanie Schrödingera z dwoma poprawkami zawierającymi pola \vec{B} i \vec{E} . Ta druga poprawka może być pominięta w stosunku do składnika $e\varphi$, bo wyrażenie $\Psi^+ \vec{\alpha} \Psi$ dla stanów o zdeklarowanym znaku energii jest rzędu $\frac{v}{c}$. Najłatwiej można to zauważyć w reprezentacji standardowej, w

której macierz $\vec{\alpha}$, jako "antydiagonalna" w tej reprezentacji, zamienia „duże” i „małe” składowe bispinora⁸. Zauważmy dalej, że dla cząstki w stanie związanym ograniczonej obszarem (studnią) o rozmiarach rzędu a , wielkość $e\varphi$ jest rzędu $e|\vec{E}|a$, a mv jest rzędu $\frac{\hbar}{a}$. Mamy więc

⁸ Wyrażenie $\Psi^+ \vec{\alpha} \Psi$ nie zależy od wyboru reprezentacji (spinorowej, standardowej lub innej).

$$\frac{e\hbar\vec{\alpha}\cdot\vec{E}}{2mc} / e\varphi \sim \frac{e\hbar v E}{2mc^2 e E a} \sim \frac{v^2}{c^2}.$$

Pozostaje więc przybliżone równanie

$$i\hbar\partial_t\Psi'(x) = \left[\frac{1}{2m}(\hat{p} - e\vec{A})^2 + e\varphi - \frac{e\hbar}{2m}\vec{\Sigma}\cdot\vec{B} \right] \Psi'(x).$$

Przypomnijmy, że pierwsze dwa składniki w nawiasie kwadratowym są obecne w zwykłym nierelatywistycznym równaniu Schrödingera, w którym pojawiają się na zasadzie kwantowania klasycznej funkcji Hamiltona dla naładowanej cząstki punktowej zanurzonej w zewnętrznym polu magnetycznym i elektrycznym.

Najciekawszy jest składnik ostatni i do jego dyskusji teraz przystąpimy.

Jak wiemy, energia oddziaływania momentu magnetycznego $\vec{\mu}$ z zewnętrznym polem magnetycznym \vec{B} może być opisana wyrażeniem $U = \vec{\mu}\cdot\vec{B}$. Można też pokazać, że krążący po płaskiej orbicie punktowy, masywny i jednocześnie naładowany obiekt niosący moment pędu \vec{L} może być traktowany jako obwód z prądem posiadający moment magnetyczny $\vec{\mu} = \frac{q}{2m}\vec{L}$. Przy wyprowadzeniu tego związku istotne jest założenie o tym, że ładunek krążącego obiektu skupiony jest dokładnie tam, gdzie skupiona jest jego masa.

Wracamy do naszego równania. W operatorze Hamiltona znajdujemy tam składnik $-\frac{e\hbar}{2m}\vec{\Sigma}\cdot\vec{B} = \frac{(-e)}{m}\left(\frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}\right)\cdot\vec{B} = \frac{(-e)}{m}\left[\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\end{pmatrix}\right]\cdot\vec{B}$, którego postać wydaje się opisywać oddziaływanie spinowego momentu magnetycznego elektronu z polem magnetycznym. „Nie zgadza” się tylko jeden szczegół: na pierwszy rzut oka składnik ten wydaje się dwukrotnie za duży. Operatorem spinu jest bowiem operator $\frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}$ (wartości własne rzutu spinu na kierunek pola magnetycznego wynoszą $\pm\frac{\hbar}{2}$), czyli

„brakuje” dwójki w mianowniku występującej we wzorze $U = \vec{\mu}\cdot\vec{B} = \frac{q}{2m}\vec{L}\cdot\vec{B}$. Rzecz w tym, że fizycy atomowi, mierząc rozszczepienie poziomów wynikające z oddziaływania spinu z polem zewnętrznym, już wcześniej stwierdzili doświadczalnie, że dwójki tej być nie powinno. Konieczność wstawiania do operatora Hamiltona nierelatywistycznego równania Schrödingera wyrażenia $-\frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$ zamiast łatwego do

interpretacji $-\frac{e\hbar}{4m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$ tłumaczono „anomalnym momentem magnetycznym elektronu”. Wynik, który uzyskaliśmy na podstawie równania Diraka, jest skrajnie (i bardzo sympatycznie) zaskakujący: „proste” założenie o tym, że przestrzenie S i \dot{S} wypowiadają się zgodnie na temat spinu cząstki spoczywającej, doprowadziło nas do wyprowadzenia zgodnej z doświadczeniem formuły na spinowy moment magnetyczny elektronu bez uciekania się do podejrzanych „wyjaśnień” o masie rozłożonej w elektronie bardziej centralnie, niż ładunek. Takie wyjaśnienie jest podejrzane chociażby dlatego, że do dziś elektron nawet w najbardziej wyrefinowanych doświadczeniach jawi się jako punkt.

3

RÓWNANIE DIRAKA DLA POŁA ELEKTROSTATYCZNEGO O SYMETRII SFERYCZNEJ; ATOM WODORU

ZADANIE

Dla pola elektrostatycznego o symetrii sferycznej opisanego potencjałem ($\varphi = \varphi(r)$, $\vec{A} = 0$) wykaż, że składowe operatora $\hat{J} = \hat{L} + \frac{1}{2}\hbar\vec{\Sigma}$ (gdzie \hat{L} jest operatorem orbitalnego momentu pędu) komutują z hamiltonianem dirakowskim $\hat{H} = c\vec{\alpha} \cdot \hat{p} + \beta mc^2 + e\varphi(r)$.

Rozwiązanie:

Operatory orbitalnego momentu pędu $\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3$ komutują z każdą (traktowaną jako operator) funkcją sferycznie symetryczną (skąd to wiadomo?), więc

$$\begin{aligned} [\hat{L}_k, \hat{H}] &= [\hat{L}_k, c\vec{\alpha} \cdot \hat{p}] = c\vec{\alpha} \cdot [\hat{L}_k, \hat{p}] = c\sum_l \alpha^l [\hat{L}_k, \hat{p}_l] \\ &= (-i\hbar)^2 c \sum_{l,t,s} \epsilon_{tsk} \alpha^l [\hat{x}^t \partial_s, \partial_l] = -(-i\hbar)^2 c \sum_{l,t,s} \epsilon_{tsk} \alpha^l \delta_l^t \partial_s = -(-i\hbar)^2 c \sum_{t,s} \epsilon_{tsk} \alpha^t \partial_s \\ &= i\hbar c \sum_{t,s} \epsilon_{tsk} \alpha^t \hat{p}_s. \end{aligned}$$

Dalej obliczamy:

$$[\vec{\Sigma}, \beta] = [-\vec{\alpha}\gamma^5, \beta] = [-\gamma^0 \vec{\gamma} \gamma^5, \gamma^0] = 0 \text{ bo } \gamma^0 \text{ antykomutuje z } \gamma^5 \text{ i z każdą składową } \vec{\gamma}.$$

Tak więc

$$\left[\frac{1}{2} \hbar \vec{\Sigma}, \hat{H} \right] = c \frac{\hbar}{2} [\vec{\Sigma}, \vec{\alpha} \cdot \hat{p}].$$

k -ta składowa tego komutatora jest równa (obliczenia przeprowadzimy w reprezentacji standardowej ale ostateczny wynik będzie jawnie niezmienniczy względem zmiany reprezentacji)

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} \hbar \Sigma_k, \hat{H} \right] &= c \frac{\hbar}{2} [\Sigma_k, \vec{\alpha} \cdot \hat{p}] = c \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & [\sigma_k, \vec{\sigma}] \\ [\sigma_k, \vec{\sigma}] & 0 \end{pmatrix} \cdot \hat{p} \\ &= c \frac{\hbar}{2} \sum_s \begin{pmatrix} 0 & 2i \sum_t \epsilon_{kst} \sigma_t \\ 2i \sum_t \epsilon_{kst} \sigma_t & 0 \end{pmatrix} p_s = i\hbar c \sum_{t,s} \epsilon_{kst} \alpha^t p_s = i\hbar c \sum_{t,s} \epsilon_{stk} \alpha^t \hat{p}_s. \end{aligned}$$

Komutator $[\hat{J}, \hat{H}]$ ma więc postać

$$\left[\hat{L}_k + \frac{\hbar}{2} \Sigma_k, \hat{H} \right] = i\hbar c \left(\sum_{t,s} \varepsilon_{tsk} \alpha^t \hat{p}_s + \sum_{t,s} \varepsilon_{stk} \alpha^t \hat{p}_s \right) \equiv 0.$$

(Jak zapowiadaliśmy, wynik ten jest niezmienniczy względem zmiany reprezentacji – komutator znikający w jednej reprezentacji znika w każdej innej.)

Oznacza to, że istnieją wspólne stany własne operatora \hat{H} i operatora $\hat{L} + \frac{\hbar}{2} \vec{\Sigma}$. Ten ostatni to operator całkowitego momentu pędu elektronu.



Zmierzamy oczywiście w stronę rozwiązania równania Diraka dla atomu wodoru.



Na początek — powtórka:

FUNKCJE KULISTE

Operatory orbitalnego momentu pędu (kwadrat orbitalnego momentu pędu \hat{L}^2 i jego składowa \hat{L}_z) komutują ze sobą, z czego wynika, że mają wspólny komplet wektorów własnych numerowanych parametrami l i l_z .

W reprezentacji położeń i we współrzędnych sferycznych operatory \hat{L}^2 i \hat{L}_z działają wyłącznie na zmienne kątowne θ i φ , a więc ich funkcje własne zależą tylko od tych zmiennych. Są to funkcje kuliste $Y_{l,l_z}(\theta, \varphi)$, które można znaleźć w tablicach.

Hamiltonian Schrödingera we współrzędnych sferycznych ma postać:

$$\hat{H}_{r,\theta,\varphi} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V = \hat{\Theta}_r + \frac{\hat{L}_{\theta,\varphi}^2}{2mr^2} + V.$$

Jeżeli $V = V(r)$, to operatory \hat{L}^2 i \hat{L}_z komutują z operatorem \hat{H} , czyli istnieje wspólny komplet funkcji własnych operatorów \hat{H} , \hat{L}^2 i \hat{L}_z . Operator \hat{H} , w przeciwieństwie do operatorów orbitalnego momentu pędu, działa na wszystkie trzy zmienne sferyczne. W praktyce oznacza to, że wspomniane wyżej wspólne funkcje własne są iloczynami funkcji $Y_{l,l_z}(\theta, \varphi)$ zależnej od kątów i funkcji $R(r)$ zależnej tylko od zmiennej radialnej. Oczywiście funkcja $R(r)$ numerowana jest parametrem l , bo ten wejdzie do równania poprzez wartość własną $\hbar^2 l(l+1)$ operatora \hat{L}^2 , która pojawi się w równaniu w miejsce samego operatora. Poza tym funkcja $R(r)$ numerowana jest parametrem wartości własnej energii (lub ciągłym parametrem E , jeżeli rozważamy ciągły fragment widma energii).



Jak już stwierdziliśmy rozwiązując ostatnie zadanie, w przypadku równania Diraka, nawet tego ze sferycznie symetrycznym potencjałem kulombowskim, operatory orbitalnego momentu pędu nie komutują z hamiltonianem. Z tego, co tam policzyliśmy, wynika jednak, że muszą istnieć wspólne funkcje własne dirakowskiego operatora Hamiltona oraz operatorów $\left(\hat{L} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}\right)^2$ i $\left(\hat{L} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}\right)_z$.

Z ogólnych reguł rządzących składaniem momentów pędu wynika, że jeżeli wartości własne operatorów \hat{L}^2 i \hat{L}_z są odpowiednio $\hbar^2 l(l+1)$ i $\hbar l_z$, a operatorów $\left(\frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}\right)^2$ i $\frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}_z$ odpowiednio $\hbar^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)$ oraz $\pm \frac{\hbar}{2}$, to operatory $\hat{J}^2 \equiv \left(\hat{L} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}\right)^2$ i $\hat{J}_z \equiv \left(\hat{L} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}\right)_z$ mają widmo odpowiednio $\hbar^2 j(j+1)$ oraz $\hbar m$, gdzie

$$j = l + \frac{1}{2} \text{ lub } j = l - \frac{1}{2}, \quad m = -j, \dots, +j.$$

Spróbujmy więc znaleźć wspólne stany własne hamiltonianu Diraka z potencjałem $V(r)$ oraz operatorów $\left(\hat{L} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}\right)^2$ i $\left(\hat{L} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}\right)_z$ do wartości własnych odpowiednio E , $\hbar^2 j(j+1)$ i $\hbar m$.

Po oddzieleniu zmiennej czasowej od zmiennych przestrzennych równanie Diraka w reprezentacji standardowej dla cząstki naładowanej umieszczonej w sferycznie symetrycznym polu elektrostatycznym przyjmie postać

$$E \begin{pmatrix} \varphi(\vec{x}) \\ \chi(\vec{x}) \end{pmatrix} = \left[c \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} mc^2 + V(|\vec{x}|) \right] \begin{pmatrix} \varphi(\vec{x}) \\ \chi(\vec{x}) \end{pmatrix},$$

co zapiszemy w postaci układu dwóch równań

$$(E - mc^2 - V)\varphi = c\vec{\sigma} \cdot \hat{p}\chi, \quad (\text{równanie 1})$$

$$(E + mc^2 - V)\chi = c\vec{\sigma} \cdot \hat{p}\varphi. \quad (\text{równanie 2})$$

Stan opisany funkcją falową $\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ ma być stanem własnym energii, kwadratu całkowitego momentu pędu \hat{J}^2 i jego rzutu \hat{J}_z . Powinno więc zachodzić

$$\left(\hat{L}(\theta, \varphi) + \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\right)^2 \varphi_{j,m}(r, \theta, \varphi) = \hbar^2 j(j+1)\varphi_{j,m}(r, \theta, \varphi),$$

$$\left(\hat{L}_z(\theta, \varphi) + \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}_z\right) \varphi_{j,m}(r, \theta, \varphi) = \hbar m \varphi_{j,m}(r, \theta, \varphi),$$

$$\left(\hat{L}(\theta, \varphi) + \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\right)^2 \chi_{j,m}(r, \theta, \varphi) = \hbar^2 j(j+1)\chi_{j,m}(r, \theta, \varphi),$$

$$\left(\hat{L}_z(\theta, \varphi) + \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}_z\right) \chi_{j,m}(r, \theta, \varphi) = \hbar m \chi_{j,m}(r, \theta, \varphi).$$

Operatory momentu pędu nie działają na zmienną r . Spróbujemy więc szukać rozwiązania w postaci

$$\begin{pmatrix} \varphi(r, \theta, \varphi) \\ \chi(r, \theta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(r)\varphi'(\theta, \varphi) \\ S(r)\chi'(\theta, \varphi) \end{pmatrix}.$$

Zajmiemy się pierwszą parą równań:

$$\begin{aligned} \hat{J}^2 \varphi'_{j,m}(\theta, \varphi) &= \hbar^2 j(j+1) \varphi'_{j,m}(\theta, \varphi), \\ \hat{J}_z \varphi'_{j,m}(\theta, \varphi) &= \hbar m \varphi'_{j,m}(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

Dwukomponentowa funkcja $\begin{pmatrix} \varphi'_{j,m;1}(\theta, \varphi) \\ \varphi'_{j,m;2}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}$ ma być wynikiem złożenia dwóch momentów pędu:

jednego opisanego operatorami \hat{L}^2 i \hat{L}_z , drugiego związanego z operatorami $\left(\frac{\hbar}{2}\hat{\Sigma}\right)^2$ i $\frac{\hbar}{2}\hat{\Sigma}_z$ (por. *Dodatek 2* — *Składanie momentów pędu*). Z wektorów $|l, l_z\rangle$ i $|\frac{1}{2}, m_s\rangle$ można złożyć wektory $|l + \frac{1}{2}, m\rangle$ (spin ustawiony „zgodnie z orbitalnym momentem pędu”) z wartością parametru m zmieniającą się w granicach $m = -(l + \frac{1}{2}), \dots, +(l + \frac{1}{2})$ oraz $|l - \frac{1}{2}, m\rangle$ (spin ustawiony „przeciwnie do orbitalnego momentu pędu”) przy wartości parametru m zmieniającej się od $-(l - \frac{1}{2})$ do $+(l - \frac{1}{2})$. Różne wartości parametru m odpowiadają różnym możliwościom ustawienia się całkowitego momentu pędu względem osi „z”.

Rozważmy pierwszą możliwość.

Maksymalna wartość rzutu całkowitego momentu pędu wynosi wtedy $l + \frac{1}{2}$ a odpowiadający jej wektor ma postać (wektory odpowiadające całkowitemu momentowi pędu oznaczać będziemy $|l, \frac{1}{2}; j, m\rangle$ albo w skrócie $|j, m\rangle$)

$$|l + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}\rangle = |l, l\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle.$$

Stany o mniejszych rzutach całkowitego momentu pędu można wygenerować wielokrotnym działaniem operatora

$$\hat{J}_- \equiv \hat{J}_x - i\hat{J}_y = \hat{L}_- + \frac{\hbar}{2}\hat{\Sigma}_-$$

na obydwie strony powyższej równości. Po wielokrotnym, na przykład n -krotnym, zastosowaniu operatora \hat{J}_- dostaniemy po prawej stronie sumę nie więcej niż dwóch składników:

$$|l + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2} - n\rangle \equiv |l + \frac{1}{2}, m\rangle = \alpha |l, l - n\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \beta |l, l - (n - 1)\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle,$$

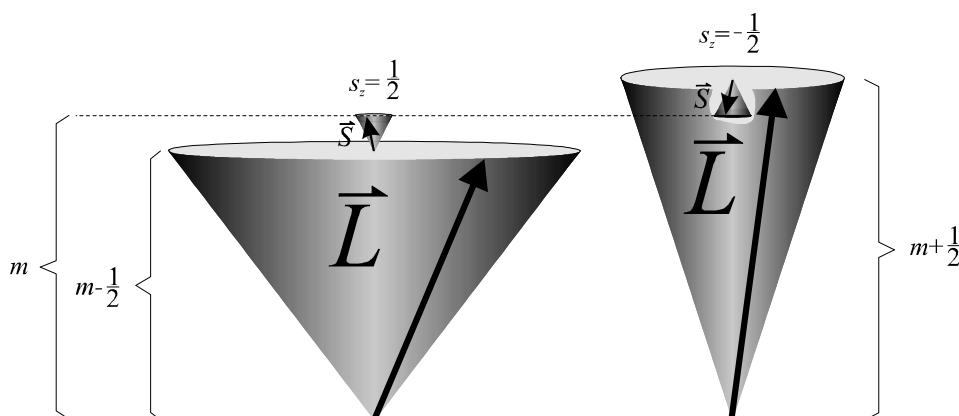
bo spin elektronu ma tylko dwa możliwe rzuty. Mamy więc zawsze

$$|l + \frac{1}{2}, m\rangle = \alpha |l, m - \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \beta |l, m + \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$$

a pamiętając o związku między l i j zapiszemy

$$|j, m\rangle = \alpha |j - \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \beta |j - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle.$$

Graficzna ilustracja tego „składania” pokazuje jak daleko od rzeczywistości leżą nasze próby wyobrażenia sobie dodawania krętów na podobieństwo dodawania wektorów. Spróbujmy zobrazować ostatni wzór. Jak wiemy, w stanie własnym krętu $|j, m\rangle$ mamy określoną wartość własną operatora kwadratu krętu (wynosi ona $\hbar^2 j(j+1)$) i jego składowej w wybranym kierunku, która wynosi $\hbar m$. Wartości składowych w kierunkach prostopadłych do tego wybranego są nieokreślone. Możemy próbować pomóc wyobraźni przedstawiając kręt jako wektor precesujący po stożku wokół wybranego kierunku. Przy takim sposobie prezentacji obydwu składnikom występującym po prawej stronie ostatniego wzoru przypisalibyśmy – odpowiednio – dwie części poniższego rysunku (wzór powtarzamy pod rysunkiem).



$$|j, m\rangle = \alpha |j - \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \beta |j - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle.$$

Warto podkreślić że obydwie części tego rysunku (i przypisane do nich składniki) odpowiadają przypadkowi $j = l + s = l + \frac{1}{2}$, czyli przypadkowi spinu „zgodnie ustawionego” z krętem orbitalnym. Tak więc prawa część rysunku pokazuje, do jakiego stopnia naiwne są nasze wyobrażenia o naturze wielkości fizycznych kryjących się za operatorami momentu pędu.

Podobnie, jeśli $j = l - \frac{1}{2}$ (spin skierowany przeciwnie do orbitalnego momentu pędu), to

$$|j, m\rangle = \alpha' |j + \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \beta' |j + \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle.$$

Odpowiedni rysunek wygląda podobnie, tylko „wartość bezwzględna” krętu orbitalnego jest większa.

Liczby α , β , α' , β' to odpowiednie współczynniki Clebscha—Gordana:

$$\begin{aligned} \alpha &= \langle l, \frac{1}{2}; m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | l + \frac{1}{2}, m \rangle, \\ \beta &= \langle l, \frac{1}{2}; m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | l + \frac{1}{2}, m \rangle, \\ \alpha' &= \langle l, \frac{1}{2}; m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | l - \frac{1}{2}, m \rangle, \\ \beta' &= \langle l, \frac{1}{2}; m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | l - \frac{1}{2}, m \rangle, \end{aligned}$$

które znajdujemy w tablicach:

$$\alpha = \beta' = \sqrt{\frac{l + m + \frac{1}{2}}{2l + 1}},$$

$$\beta = -\alpha' = \sqrt{\frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}}.$$

Należy podkreślić, że obydwie wyżej wypisane stany, chociaż odpowiadają tym samym wartościom j i m , to jednak przynależą do dwóch różnych "trapezowych tabel" (por. *Dodatek 2* str. 100): pierwszy powstaje ze składowania momentów pędu $j_1 = l = j - \frac{1}{2}$, $j_2 = \frac{1}{2}$ i figuruje na odpowiednim miejscu w pierwszej z dwóch kolumn tabeli, a drugi odpowiada złożeniu momentów pędu $j_1 = l = j + \frac{1}{2}$, $j_2 = \frac{1}{2}$ i zajmuje odpowiednie miejsce w drugiej kolumnie innej tabeli. Obydwie wymienione tabele składają się z dwóch kolumn; pierwsza kolumna odpowiada „równoległemu” ustawieniu orbitalnego momentu pędu i spinu, a druga — „antyrównoległemu”.

Wróćmy do równania Diraka. W reprezentacji funkcji falowych wektorom $|l, l_z\rangle$ odpowiadają funkcje kuliste $Y_{l, l_z}(\theta, \varphi)$, zaś wektorom $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ i $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ odpowiednio kolumny $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dlatego spinor φ' możemy zaproponować w postaci

$$\begin{aligned} |j, m\rangle \rightarrow \varphi' &= \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} = \alpha Y_{j-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta Y_{j-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}} Y_{j-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}} Y_{j-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+m}{2j}} Y_{j-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{j-m}{2j}} Y_{j-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} \varphi'_{j, l, m; 1}(\theta, \varphi) \\ \varphi'_{j, l, m; 2}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \equiv \Omega_{j, l, m}(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

gdzie $l = j - \frac{1}{2}$ (czyli $j = l + \frac{1}{2}$), albo w postaci

$$\begin{aligned} |j, m\rangle \rightarrow \varphi' &= \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} = \alpha' Y_{j+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta' Y_{j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{l'-m+\frac{1}{2}}{2l'+1}} Y_{j+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{l'+m+\frac{1}{2}}{2l'+1}} Y_{j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j+1-m}{2j+2}} Y_{j+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{j+1+m}{2j+2}} Y_{j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} \varphi'_{j, l', m; 1}(\theta, \varphi) \\ \varphi'_{j, l', m; 2}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \equiv \Omega_{j, l', m}(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

gdzie $l' = j + \frac{1}{2}$ (czyli $j = l' - \frac{1}{2}$).

Pamiętamy z wcześniejszych rachunków, że równanie Diraka pozwala wybierać jedną parę składowych bispinora, wyznaczając drugą z nich. Wybierzmy więc w roli spinora φ ten odpowiadający jednej z dwóch dopuszczalnych wartości krętu orbitalnego, na przykład $l = j - \frac{1}{2}$ (czyli $j = l + \frac{1}{2}$):

$$\Psi_{E,j,m}(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} R(r)\Omega_{j,l,m}(\theta, \varphi) \\ \chi = ? \end{pmatrix}$$

i teraz na pewno trzeba się odwołać do równania Diraka, z którego w szczególności wynika, że

$$\chi(\vec{x}) = \frac{c\vec{\sigma} \cdot \hat{p}}{E + mc^2 - V} \varphi(\vec{x}).$$

Dla określenia funkcji χ wystarczy teraz porównać parzystości funkcji χ i φ . Chodzi o reakcję funkcji falowej na zmianę znaku wektora \vec{x} . W zmiennych sferycznych odbicie $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ realizuje się przez zmianę zmiennych $r \rightarrow r$, $\theta \rightarrow \pi - \theta$, $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$. Dla funkcji kulistych prawdziwy jest związek

$$Y_{l,m}(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^l Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

a więc mają one określoną parzystość. Macierz $\vec{\sigma} \cdot \hat{p}$ ma postać

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p} = -i\hbar \begin{pmatrix} \partial_z & \partial_x - i\partial_y \\ \partial_x + i\partial_y & -\partial_z \end{pmatrix}.$$

Taki operator, działając na funkcję parzystą, zmienia ją w nieparzystą i v.v. Dlatego funkcje χ i φ muszą mieć przeciwną parzystość (sferycznie symetryczny potencjał jest parzysty): wartość parametru l w składowych χ i φ musi się różnić o liczbę nieparzystą czyli w naszym przypadku o 1. Możemy więc rozważać dwa przypadki:

1. Rozwiązania, w których w składowej φ zachodzi $l = j - \frac{1}{2}$ (w składowej χ mamy wtedy $l' = j + \frac{1}{2}$) — nazwijmy je rozwiązaniami I-go typu

$$\Psi_{E,j,m}(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} R(r)\Omega_{jlm} \\ S(r)\Omega_{j'l'm} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} l = j - \frac{1}{2} \\ l' = j + \frac{1}{2} \end{matrix}$$

2. Rozwiązania, w których w składowej φ mamy $l' = j + \frac{1}{2}$ (rozwiązania II-go typu)

$$\Psi_{E,j,m}(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} R(r)\Omega_{jlm} \\ -S(r)\Omega_{j'l'm} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} l = j + \frac{1}{2} \\ l' = j - \frac{1}{2} \end{matrix}, \quad (\text{minus przy dolnej składowej pojawił się dla przyszłej wygody}).$$

Obydwa te rozwiązania można objąć jedną formułą

$$\Psi_{E,j,m}(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} R(r)\Omega_{jlm} \\ (-1)^{\frac{l+l'}{2}} S(r)\Omega_{j'l'm} \end{pmatrix}, \quad \text{w której albo mamy } \begin{pmatrix} l = j - \frac{1}{2} \\ l' = j + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{albo } \begin{pmatrix} l = j + \frac{1}{2} \\ l' = j - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Skorzystamy teraz ze związku, który zachodzi między funkcjami Ω obydwu rodzajów, niezależnie od tego, czy $l - l' = 1$, czy $l' - l = 1$:

$\Omega_{j'l'm} = i^{l-l'} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \Omega_{jlm}$, gdzie $\vec{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \frac{\vec{x}}{r}$. Jak się zaraz okaże, jego szczegółowy dowód nie jest

nam tu potrzebny – pokażemy tylko⁹, że funkcje $\Omega_{j'l'm}$ oraz $\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \Omega_{jlm}$ różnią się co najwyżej o czynnik liczbowy, który nie jest istotny, dopóki funkcja $S(r)$ nie jest określona. Aby to zrobić, wystarczy pokazać, że składowe operatora krętu całkowitego $\hat{L} + \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$ komutują z $\vec{\sigma} \cdot \vec{n}$:

$$\begin{aligned} \left[\hat{L}_i + \frac{\hbar}{2} \sigma_i, \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \right] &= \left[\hat{L}_i \text{ działa tylko na } \theta \text{ i } \varphi \right] = \frac{1}{r} \left[\hat{L}_i + \frac{\hbar}{2} \sigma_i, \sigma_j x_j \right] \\ &= \frac{1}{r} \left[\hat{L}_i + \frac{\hbar}{2} \sigma_i, \sigma_j x_j \right] = \frac{\sigma_j}{r} [\hat{L}_i, x_j] + \frac{\hbar x_j}{2r} [\sigma_i, \sigma_j] = \dots \end{aligned}$$

Obliczamy obydwie komutatory:

$$\left[\hat{L}_i, x_j \right] = i\hbar \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \left[\sigma_i, \sigma_j \right] = 2i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \quad (\text{por. zadanie na str. 7})$$

i podstawiamy do rachunku, otrzymując:

$$\dots = \frac{\sigma_j}{r} i\hbar \varepsilon_{ijk} x_k + \frac{\hbar x_j}{2r} 2i \varepsilon_{ijk} \sigma_k = \frac{i\hbar}{r} (\varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{ikj}) x_k \sigma_j \equiv 0.$$

Stąd wynika, że funkcja $\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \Omega_{jlm}$ jest również (obok funkcji Ω_{jlm}) wspólną funkcją własną operatorów $\left(\hat{L} + \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \right)^2$ oraz $\left(\hat{L} + \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \right)_z$ do tych samych wartości własnych – odpowiednio – $\hbar^2 j(j+1)$ oraz $\hbar m$. Funkcje Ω_{jlm} oraz $\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \Omega_{jlm}$ mają przeciwną parzystość, a to już wymusza liniową zależność (czyli proporcjonalność) funkcji $\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \Omega_{jlm}$ do funkcji $\Omega_{j'l'm}$, bo podprzestrzeń złożona z funkcji własnych, odpowiadających wymienionym wartościom własnym, jest w naszym przypadku dwuwymiarowa.

Przyjęty wyżej związek $\Omega_{j'l'm} = i^{l-l'} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \Omega_{jlm}$ pozwala wyrazić górne składowe kątowe bispinora przez składowe dolne. Mamy bowiem teraz $\chi = -i(\vec{\sigma} \cdot \vec{x}) \frac{S(r)}{r} \Omega_{jlm}$ i skupiamy się na prawej stronie równania 1 ze strony 57:

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{p}) \chi = -i(\vec{\sigma} \cdot \hat{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{x}) \frac{S(r)}{r} \Omega_{jlm}.$$

Obliczamy:

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \hat{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{x}) &= (\sigma_i \hat{p}_i)(\sigma_k x_k) = \sigma_i \sigma_k \hat{p}_i x_k = \hat{p}_i x_k + i \varepsilon_{ikl} \sigma_l \hat{p}_i x_k \\ &= -i\hbar \partial_k x_k + \hbar \varepsilon_{ikl} \sigma_l \partial_i x_k = -i\hbar(x_k \partial_k + 3) + \hbar \sigma_l \varepsilon_{ikl} (\delta_{ik} + x_k \partial_i) \\ &= -i\hbar(x_k \partial_k + 3) + i(-i)\hbar \sigma_l \varepsilon_{ikl} x_k \partial_i = -i\hbar(x_k \partial_k + 3) - i\vec{\sigma} \cdot \hat{L}. \end{aligned}$$

⁹ Pomysł poniższego rozumowania pochodzi od doktora Jakuba Meisnera, który, będąc wówczas studentem naszego Instytutu, przesłał mi go przed kilkunastu laty listownie po przeczytaniu pierwszego wydania skryptu.

Tak więc

$$\begin{aligned}
 (\vec{\sigma} \cdot \hat{p})\chi &= \left[-\hbar(\vec{x} \cdot \vec{\nabla} + 3) - \vec{\sigma} \cdot \hat{L} \right] \frac{S(r)}{r} \Omega_{jlm} \\
 &= \left\{ -\hbar \left[\vec{x} \cdot \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \right) + 3 \right] - \vec{\sigma} \cdot \hat{L} \right\} \frac{S(r)}{r} \Omega_{jlm} \\
 &= \left[-\hbar S'(r) - 2\hbar \frac{S(r)}{r} - \vec{\sigma} \cdot \hat{L} \frac{S(r)}{r} \right] \Omega_{jlm}.
 \end{aligned}$$

Wartości własne operatora $\vec{\sigma} \cdot \hat{L}$ łatwo wyliczyć. Mamy bowiem

$\vec{\sigma} \cdot \hat{L} = \frac{2}{\hbar} \vec{S} \cdot \hat{L}$, gdzie symbolem \vec{S} oznaczyliśmy trójkę macierzy $\frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$, czyli reprezentację macierzową operatora spinu $\frac{1}{2}$.

Z drugiej strony

$$\hat{J}^2 = \left(\hat{L} + \vec{S} \right)^2 = \hat{L}^2 + \vec{S}^2 + 2\hat{L} \cdot \vec{S},$$

czyli

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{L} = \frac{1}{\hbar} \left(\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \vec{S}^2 \right).$$

Używane przez nas dwukomponentowe kolumny Ω_{jlm} są reprezentantami wektorów własnych operatorów \hat{J}^2 , \hat{L}^2 i \vec{S}^2 , czyli na miejsce operatora $\vec{\sigma} \cdot \hat{L}$ wejdą liczby:

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{L} \rightarrow \frac{1}{\hbar} \left[\hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right] = \begin{cases} \hbar(j - \frac{1}{2}) & \text{gdy } l = j - \frac{1}{2} \\ \hbar(-j - \frac{3}{2}) & \text{gdy } l = j + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dla ujednoczenia zapisu przypadków $l = j - \frac{1}{2}$ i $l = j + \frac{1}{2}$ wprowadzimy zmienną k (l oznacza tu w obydwu przypadkach parametr odnoszący się do górnej składowej Ω_{jlm}):

$$\begin{aligned}
 k &= j + \frac{1}{2}, & \text{gdy } l &= j - \frac{1}{2} & (\text{rozwiązania I-go typu}), \\
 k &= -(j + \frac{1}{2}), & \text{gdy } l &= j + \frac{1}{2} & (\text{rozwiązania II-go typu}),
 \end{aligned}$$

która może przyjmować wartości $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Przypadek $k > 0$ oznacza spin "równoległy" do orbitalnego momentu pędu, $k < 0$ — "antyrownoległy".

Dzięki temu możemy napisać $\vec{\sigma} \cdot \hat{L} \rightarrow \hbar(k - 1)$ dla obydwu przypadków i teraz

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p}\chi = \left[-\hbar S'(r) - 2\hbar \frac{S(r)}{r} - \hbar(k - 1) \frac{S(r)}{r} \right] \Omega_{jlm},$$

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p} \chi = -\hbar \left(S'(r) + \frac{S(r)}{r} (1+k) \right) \Omega_{jlm}.$$

Cały powyższy zabieg pozwala uprościć przez Ω_{jlm} . Jeżeli bowiem rozważymy pierwsze z dwóch wyjściowych równań (równanie 1)

$$(E - mc^2 - V)\varphi = c \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \chi,$$

to mamy teraz

$$(E - mc^2 - V)R(r)\Omega_{jlm} = -\hbar c \left(S'(r) + \frac{S(r)}{r} (1+k) \right) \Omega_{jlm}$$

i stąd pierwsze równanie na funkcje radialne ma postać

$$\frac{1}{\hbar c} (E - mc^2 - V)R(r) + S'(r) + \frac{S(r)}{r} (1+k) = 0,$$

czyli jeśli podstawić

$$R(r) \equiv \frac{F(r)}{r},$$

$$S(r) \equiv \frac{G(r)}{r},$$

to otrzymujemy

$$\frac{1}{\hbar c} (E - mc^2 - V)F + G' + \frac{k}{r} G = 0.$$

Podobne zabiegi wykonane nad drugim równaniem (równanie 2) prowadzą do:

$$\frac{1}{\hbar c} (E + mc^2 - V)G - F' + \frac{k}{r} F = 0.$$

Dostaliśmy dwa równania różniczkowe pierwszego rzędu na dwie funkcje $F(r)$ i $G(r)$.

W miejsce współrzędnej r wygodnie jest wprowadzić zmienną bezwymiarową $\rho = \alpha r$, gdzie

$$\alpha = +\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}, \quad \alpha_1 = \frac{mc^2 + E}{\hbar c}, \quad \alpha_2 = \frac{mc^2 - E}{\hbar c}.$$

(Rozważamy stany związane. Wynika z tego, że liczba $mc^2 - E$ jest dodatnia, bo energia E dla cząstki spoczywającej w nieskończoności wynosi mc^2 , więc dla cząstki związanej w studni potencjału musi być mniejsza od mc^2 .)

W nowych oznaczeniach zapiszemy

$$\left(\frac{d}{d\rho} + \frac{k}{\rho} \right) G - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha} + \frac{V}{\hbar c \alpha} \right) F = 0,$$

$$\left(\frac{d}{d\rho} - \frac{k}{\rho}\right)F - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha} - \frac{V}{\hbar c \alpha}\right)G = 0.$$

Dla jonu wodoropodobnego należy podstawić

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} = -\frac{Ze^2}{\rho} \alpha, \quad \text{czyli} \quad \frac{V}{\hbar c \alpha} = -\frac{Ze^2}{\hbar c \rho} = -\frac{\gamma}{\rho}$$

(stała γ jest bezwymiarowa i proporcjonalna do tzw. stałej struktury subtelnej $\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$) i teraz równania na funkcje $F(r)$ i $G(r)$ przybiorą postać

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\rho} + \frac{k}{\rho}\right)G - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha} - \frac{\gamma}{\rho}\right)F &= 0, \\ \left(\frac{d}{d\rho} - \frac{k}{\rho}\right)F - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\gamma}{\rho}\right)G &= 0. \end{aligned}$$

Dla dostatecznie dużych wartości ρ mamy układ równań

$$\begin{aligned} G' - \frac{\alpha_2}{\alpha} F &= 0, \\ F' - \frac{\alpha_1}{\alpha} G &= 0, \end{aligned}$$

który prowadzi do

$$\begin{aligned} F'' - F &= 0, \\ G'' - G &= 0, \end{aligned}$$

co sugeruje, aby rozwiązania szukać w postaci

$$F(\rho) = f(\rho)e^{-\rho}, \quad G(\rho) = g(\rho)e^{-\rho},$$

gdzie eksponenty są wiodące dla dużych wartości ρ . Po podstawieniu do równań mamy

$$\begin{aligned} g' + \left(\frac{k}{\rho} - 1\right)g - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha} - \frac{\gamma}{\rho}\right)f &= 0, \\ f' - \left(\frac{k}{\rho} + 1\right)f - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\gamma}{\rho}\right)g &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązań tych równań szukamy w postaci

$$\begin{aligned} f &= \rho^s (a_0 + a_1 \rho + \dots), \\ g &= \rho^s (b_0 + b_1 \rho + \dots), \end{aligned}$$

gdzie $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$.

Pamiętamy, że w poszukiwanej przez nas funkcji falowej występują funkcje $R(r)$ i $S(r)$:

$$R(r) = r^{-1}F(r), \quad S(r) = r^{-1}G(r).$$

Rozwiązania równania Schrödingera nie powinny mieć niecałkowalnej osobliwości w $r = 0$, tzn. całki

$$\int_0^{\infty} |R(r)|^2 r^2 dr \quad \text{oraz} \quad \int_0^{\infty} |S(r)|^2 r^2 dr$$

nie powinny "sprawiać kłopotów" w dolnej granicy całkowania. Oznacza to z kolei, że dla funkcji $R(r)$ i $S(r)$ dopuszczamy osobliwości w zerze nie silniejsze niż rzędu $[r(r)^a]^{-1}$, gdzie $a < \frac{1}{2}$. Oznacza to, że wykładnik s może być mniejszy od zera, ale musi być większy od -0,5.

Podstawiając funkcje f i g do równań, dostajemy odpowiednio

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [b_{\nu}(\nu + s + k) + \gamma a_{\nu}] \rho^{\nu+s-1} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(b_{\nu-1} + \frac{\alpha_2}{\alpha} a_{\nu-1} \right) \rho^{\nu+s-1} = 0,$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [a_{\nu}(\nu + s - k) - \gamma b_{\nu}] \rho^{\nu+s-1} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(a_{\nu-1} + \frac{\alpha_1}{\alpha} b_{\nu-1} \right) \rho^{\nu+s-1} = 0,$$

czyli dla $\nu = 1, 2, 3, \dots$ powinno zachodzić

$$(\nu + s + k)b_{\nu} - b_{\nu-1} + \gamma a_{\nu} - \frac{\alpha_2}{\alpha} a_{\nu-1} = 0, \quad (\text{A})$$

$$(\nu + s - k)a_{\nu} - a_{\nu-1} - \gamma b_{\nu} - \frac{\alpha_1}{\alpha} b_{\nu-1} = 0, \quad (\text{B})$$

a dla $\nu = 0$ dostajemy odrębnie

$$\gamma a_0 + (s + k)b_0 = 0,$$

$$(s - k)a_0 - \gamma b_0 = 0.$$

Niezerowe rozwiązania ostatnich dwóch równań uzyskamy, jeżeli

$$\gamma^2 + s^2 - k^2 = 0, \quad \text{czyli} \quad s = \pm \sqrt{k^2 - \gamma^2}.$$

Pamiętamy, że $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ itd. Równocześnie $\gamma = \frac{Z}{137}$. Widać więc, że skoro s musi być większe od -0,5, to chcąc uniknąć osobliwości w punkcie $r = 0$ możemy przyjąć tylko górny znak pierwiastka. Równanie (A) mnożymy teraz przez α , równanie (B) przez α_2 i odejmując otrzymujemy:

$$b_{\nu}[\alpha(\nu + s + k) + \alpha_2 \gamma] = a_{\nu}[\alpha_2(\nu + s - k) - \alpha \gamma]. \quad (\text{C})$$

Jak zwykle, chcąc się dowiedzieć czegoś o zachowaniu funkcji przedstawionej szeregiem dla dużych wartości jej argumentu, musimy oszacować stosunek $\frac{a_{\nu}}{a_{\nu-1}}$ (i odpowiednio $\frac{b_{\nu}}{b_{\nu-1}}$) dla dużych ν . W tym celu napiszemy przybliżenia równań (A,B,C) dla dużych ν :

$$\begin{aligned}
vb_v - b_{v-1} + \gamma a_v - \frac{\alpha_2}{\alpha} a_{v-1} &\approx 0, \\
va_v - a_{v-1} + \gamma b_v - \frac{\alpha_1}{\alpha} b_{v-1} &\approx 0, \\
\alpha b_v &\approx \alpha_2 a_v \quad (\text{a także } \alpha b_{v-1} \approx \alpha_2 a_{v-1}).
\end{aligned}$$

Korzystając z trzeciego związku, usuwamy współczynniki a z pierwszego i współczynniki b z drugiego równania, otrzymując odpowiednio

$$b_v \approx \frac{2}{\nu} b_{v-1}, \quad a_v \approx \frac{2}{\nu} a_{v-1},$$

z czego wynika, że obydwa szeregi — gdyby się nie urywały — dałyby funkcje zachowujące się w nieskończoności jak $e^{2\rho}$. Pełna funkcja falowa byłaby wtedy rozbieżna w nieskończoności. Musimy więc tak dobrać energię E , aby dla pewnego $\nu = n'$ zachodziło $a_{n'+1} = b_{n'+1} = 0$. (a_n i b_n byłyby ostatnimi współczynnikami różnymi od zera.)

Z równań (A) i (B) z uwzględnieniem (C) mamy

$$\begin{aligned}
b_{v+1} \left[(\nu+1+s+k) + \gamma \frac{\alpha(\nu+1+s+k) + \alpha_2 \gamma}{\alpha_2(\nu+1+s-k) - \alpha \gamma} \right] &= b_\nu \left[1 + \frac{\alpha_2}{\alpha} \frac{(\alpha(\nu+s+k) + \alpha_2 \gamma)}{(\alpha_2(\nu+s-k) - \alpha \gamma)} \right], \\
a_{v+1} [\text{podobny współczynnik}] &= a_\nu \left[1 + \frac{\alpha_1}{\alpha} \frac{(\alpha_2(\nu+s-k) - \alpha \gamma)}{(\alpha(\nu+s+k) + \alpha_2 \gamma)} \right].
\end{aligned}$$

Dla $\nu = n'$ powinny zniknąć współczynniki przy a_ν i b_ν , czyli powinno zachodzić równocześnie

$$\alpha [\alpha_2(n'+s-k) - \alpha_2 \gamma] + \alpha_2 [\alpha(n'+s+k) + \alpha_2 \gamma] = 0$$

oraz

$$\alpha [\alpha(n'+s+k) + \alpha_2 \gamma] + \alpha_1 [\alpha_2(n'+s-k) - \alpha \gamma] = 0.$$

Obydwa równania prowadzą do identycznego związku:

$$2\alpha(s+n') = \gamma(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{2E\gamma}{\hbar c}.$$

Podnosząc do kwadratu mamy

$$\alpha^2 (s+n')^2 = \frac{m^2 c^4 - E^2}{\hbar^2 c^2} (s+n')^2 = \frac{E^2 \gamma^2}{\hbar^2 c^2}$$

i stąd

$$E = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{(s+n')^2}}} = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{k^2 - \gamma^2 + 2n'\sqrt{k^2 - \gamma^2} + n'^2}}}$$

$$= mc^2 \left[1 - \frac{\gamma^2}{2(n' + |k|)^2} - \frac{\gamma^4}{2(n' + |k|)^4} \left(\frac{n' + |k|}{|k|} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right].$$

Jedynka w nawiasie kwadratowym odpowiada energii spoczynkowej. Dla porównania z widmem atomu wodoru liczoną ze zwykłego równania Schrödingera trzeba więc zbadać resztę członów. I tak człon pierwszy daje (oznaczymy $n \equiv n' + |k|$)

$$-\frac{mc^2 \gamma^2}{2n^2} = -\frac{mZ^2 e^4}{2\hbar^2 n^2},$$

co pokrywa się dokładnie z widmem hamiltonianu Schrödingera, a reszta to poprawki relatywistyczne (bo γ jest proporcjonalne do c^{-1}). Zwraça uwagę fakt, że równanie Diraka likwiduje degenerację poziomów energii za względu na moment pędu: w wyższych poprawkach wartości własne energii zależą nie tylko od głównej liczby kwantowej n , ale też od $|k|$ (im wyższy $|k|$, czyli im większy całkowity moment pędu, tym wyżej leży poziom energii).

Widmo energii przewidywane przez równanie Diraka jest znacznie bliższe wynikom doświadczalnym niż widmo Schrödingera. Pozostające nieznaczne odchylenia (tzw. efekt Lamba) znalazły już uzasadnienie teoretyczne wywodzące się z teorii pola (polaryzacja próżni).

Do zagadnienia jakości wyników przewidywanych przez równanie Diraka wrócimy jeszcze za chwilę.

KLASYFIKACJA POZIOMÓW ENERGII

Wróćmy do parametru k , który może przyjmować wartości $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Określony $|k|$ oznacza określoną wartość j : $j = |k| - \frac{1}{2}$. Dwa możliwe znaki parametru k odpowiadają wyborowi między rozwiązaniami pierwszego i drugiego typu.

Zdefiniowaliśmy wyżej główną liczbę kwantową $n = n' + |k|$, gdzie $n' = 0, 1, 2, \dots$ (w zależności od tego, gdzie urywają się szeregi rozwinięcia części radialnych). Jeżeli więc $n' = 0, 1, 2, \dots$, to dla danego naturalnego n , $|k|$ może przybierać wartości $|k| = 1, 2, 3, \dots, n$. Dyskusji wymaga tylko znak zmiennej k .

Dla danego n wartości $k = \pm 1$ odpowiadają $n' = n - 1$ itd. aż do $k = \pm(n - 1)$, kiedy $n' = 1$. We wszystkich tych przypadkach zmienna k może być dodatnia lub ujemna; wyjątek stanowi $n' = 0$ — jest to przypadek, gdy różne od zera są tylko współczynniki a_0 i b_0 . Mamy wtedy bowiem z jednej strony (ze wzorów A lub B)

$$b_0 = -\frac{\alpha_2}{\alpha} a_0 = -\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} a_0, \quad \text{czyli} \quad \frac{b_0}{a_0} = -\frac{\alpha_2}{\alpha}$$

a z drugiej (z równań wiążących współczynniki a_0 i b_0):

$$\frac{b_0}{a_0} = -\frac{\gamma}{s+k} = -\frac{\gamma}{+\sqrt{k^2 - \gamma^2} + k}.$$

Z pierwszego związku wynika, że $\frac{b_0}{a_0} < 0$. Aby pogodzić to ze związkiem drugim, możemy dopuścić tylko $k > 0$. Dla $n' = 0$ zmienna k nie może być ujemna.

Poziomy energetyczne klasyfikujemy według n i k .

Dla $n=1$ mamy (w poniższych tabelkach l odnosi się do górnych składowych bispinora):

n'	k	l	j	nierelat. kwalifikacja stanu
0	1	0	1/2 rozw. I typu	${}^2S_{\frac{1}{2}}$

Dla $n=2$:

n'	k	l	j	nierelat. kwalifikacja stanu
0	2	1	3/2 rozw. I typu	${}^2P_{\frac{3}{2}}$
1	1	0	1/2 rozw. I typu	${}^2S_{\frac{1}{2}}$
	-1	1	1/2 rozw. II typu	${}^2P_{\frac{1}{2}}$

Dla $n=3$:

n'	k	l	j	nierelat. kwalifikacja stanu
0	3	2	5/2 rozw. I typu	${}^2D_{\frac{5}{2}}$
1	2	1	3/2 rozw. I typu	${}^2P_{\frac{3}{2}}$
	-2	2	3/2 rozw. II typu	${}^2D_{\frac{3}{2}}$
2	1	0	1/2 rozw. I typu	${}^2S_{\frac{1}{2}}$
	-1	1	1/2 rozw. II typu	${}^2P_{\frac{1}{2}}$

Jak wiemy, w granicy nierelatywistycznej dolne składowe (proporcjonalne do b_0) są do zaniechania wobec górnych, proporcjonalnych do a_0 . Widać to ze związku

$$b_0 = -\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} a_0 = -\sqrt{\frac{mc^2 - E}{mc^2 + E}} a_0.$$

W takim przypadku o zakwalifikowaniu danego stanu decyduje składowa górna, proporcjonalna do Ω_{jlm} , gdzie $l = j - \frac{1}{2}$ dla rozwiązań I-go typu i $l = j + \frac{1}{2}$ dla rozwiązań II-go typu. Powyższa uwaga odnosi się do prawych rubryk w tabelkach.

Przyjrzyjmy się jeszcze rozszczepieniu poziomów związanemu z liczbą $|k|$ (tzw. struktura subtelną). Zwykle nierelatywistyczne równanie Schrödingera takiego rozszczepienia nie opisuje: główna liczba kwantowa n sama determinuje energię. Tu natomiast, w następnym rzędzie przybliżenia, mamy już poprawkę do energii zależną od $|k|$. Dla ustalonego n wartość $|k|$ zmienia się w granicach $1 \dots n$. Maksymalna energia przypisana liczbie n wynosi więc (tylko poprawka proporcjonalna do γ^4)

$$-mc^2 \frac{\gamma^4}{2n^4} \left(1 - \frac{3}{4}\right), \quad \text{a minimalna} \quad -mc^2 \frac{\gamma^4}{2n^4} \left(n - \frac{3}{4}\right),$$

co daje odstęp między najniższym i najwyższym poziomem równy

$$mc^2 \frac{\gamma^4}{n^3} \frac{n-1}{2n}.$$

Pozostaje to w znacznie lepszej zgodzie z doświadczeniem niż rozszczepienie obliczone na podstawie równania Kleina—Gordona

$$\left(\hat{E} - e\varphi\right)^2 - \left(c\hat{p} - e\hat{A}\right)^2 = m^2 c^4,$$

które otrzymujemy równie $mc^2 \frac{\gamma^4}{n^3} \frac{n-1}{n-\frac{1}{2}}$, czyli za duże.

4

REPREZENTACJE GRUPY OBROTÓW

Grupa obrotów stanowi podgrupę grupy Lorentza. Potrafimy wskazać reprezentacje grupy Lorentza (dokładniej: grupy $SL(2, \mathbb{C})$) w przestrzeniach S i \dot{S} w postaci macierzy U o wyznaczniku równym 1 w S i odpowiednich macierzy \bar{U} w \dot{S} . Pokazaliśmy, że zwykłym trójwymiarowym obrotem odpowiadają w S i \dot{S} macierze unitarne i że reprezentacja w \dot{S} jest równoważna reprezentacji w S : przy wykonywaniu obrotów w S i \dot{S} dzieje się to samo (por. str. 18). Wystarczy więc rozważyć reprezentację grupy obrotów w S . Należy pamiętać, że grupa izomorficzna z grupą macierzy unitarnych 2×2 (nazwijmy ją grupą $SU(2)$) realizuje każdy obrót trójwymiarowy dwa razy: macierze U i $-U$ realizują ten sam trójwymiarowy obrót.

Przestrzeń S stanowi przestrzeń reprezentacji grupy $SU(2)$. Zaczynając od tej podstawowej przestrzeni można budować inne, "wyższe" reprezentacje grupy. W tym celu bierzemy p -krotny iloczyn tensorowy przestrzeni S : $S \otimes S \otimes \dots \otimes S$. (Uogólnienie definicji iloczynu tensorowego dwóch przestrzeni wektorowych na iloczyn wielokrotny jest oczywiste.) W każdej przestrzeni S działa grupa $SU(2)$.

Wstawka

REPREENATACJE REDUKOWALNE I NIEREDUKOWALNE GRUPY



Tworząc iloczyn tensorowy przestrzeni wektorowych, w których mieliśmy wcześniej określone reprezentacje jakiejś grupy, uzyskujemy automatycznie nową reprezentację tej grupy. Reprezentacje te klasyfikuje się według kryterium ich redukowalności. Wyjaśnimy teraz to pojęcie.



Grupa liniowa, działając w jakiejś przestrzeni, może wybierać w niej podprzestrzenie niezmiennicze. (Interpretujemy tu przekształcenia grupowe czynnie). Na przykład grupa obrotów wokół ustalonej osi przechodzącej przez początek układu odniesienia, realizowana w zwykłej przestrzeni 3-wymiarowej, będzie działała wewnątrz płaszczyzny prostopadłej do tej osi: każdy wektor równoległy do tej płaszczyzny będzie przekształcany (bo interpretujemy czynnie) na inny, ale też równoległy do tej płaszczyzny, a każdy prostopadły (czyli równoległy do osi) na wektor prostopadły. Mówimy, że reprezentacja 3-wymiarowa grupy obrotów wokół ustalonej osi jest redukowalna: przestrzeń trójwymiarowa da się przedstawić jako suma prosta dwóch przestrzeni, z których każda stanowi odrębną przestrzeń reprezentacji rozważanej grupy. W języku macierzy wygląda to tak:

Jeżeli baza została wybrana byle jak w stosunku do ustalonej osi obrotów, to macierze takich obrotów będą ortogonalnymi macierzami 3×3 i przeglądając je trudno będzie zauważyć, że reprezentacja jest redukowalna. Sprawa wyjdzie na jaw dopiero wtedy, kiedy ktoś ustawi bazę tak, aby na przykład oś "z" była równoległa do osi obrotów. Odpowiednio przerobione macierze reprezentacji przyjmą wtedy postać

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{Większy blok jest odpowiedzialny za opis obrotów w płaszczyźnie } (x,y), \text{ a jedynek opisuje}$$

trywialne transformacje wektorów równoległych do osi "z". Mówimy, że przestrzeń trójwymiarowa okazuje się przestrzenią redukowalną w stosunku do grupy obrotów wokół ustalonej osi i rozpada się na sumę prostą dwóch przestrzeni, w których już działają reprezentacje nieredukowalne. (Ta równoległa do osi "z" jest przypadkowo przestrzenią reprezentacji trywialnej — całej grupie odpowiada jedynek.)

Jak widać, redukowalność reprezentacji sprowadza się do istnienia podprzestrzeni niezmienniczej.

ZADANIE

Przyjmując, że $2j+1$ wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni Hilberta napięta na stanach $|j, m\rangle$ (z danym j) jest przestrzenią nieredukowalnej reprezentacji grupy obrotów, pokazać, że przestrzeń napięta na wektorach $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ jest przestrzenią reprezentacji redukowalnej, i wskazać podprzestrzenie reprezentacji nieredukowalnych, na które ta ostatnia się rozpada.
(Rozwiązanie tego zadania wymaga przestudiowania *Dodatku*.)

Przyjrzyjmy się przestrzeni $S \otimes S \otimes \dots \otimes S \equiv S^p$ pod kątem ewentualnej redukowalności reprezentacji grupy $SU(2)$ działającej w tej przestrzeni. Pokażemy, że podprzestrzeń tensorów symetrycznych w S^p jest niezmiennicza względem $SU(2)$. Najłatwiej zobaczyć to w podejściu macierzowym. Niech tensorowi należącemu do S^p odpowiadają przed transformacją współrzędne $t^{a_1 a_2 \dots a_p}$. Po transformacji (transformację możemy interpretować czynnie lub biernie) mamy

$$k^{b_1 b_2 \dots b_p} = \sum_a U_{a_1}^{b_1} U_{a_2}^{b_2} \dots U_{a_p}^{b_p} t^{a_1 a_2 \dots a_p}.$$

Z ewentualnej symetrii współrzędnych "t" wynika symetria współrzędnych "k" — porównajmy na przykład współrzędną $k^{b_1 b_2 b_3 \dots b_p}$ ze współrzędną $k^{b_2 b_1 b_3 \dots b_p}$

$$k^{b_2 b_1 b_3 \dots b_p} = \sum_a U_{a_1}^{b_2} U_{a_2}^{b_1} U_{a_3}^{b_3} \dots U_{a_p}^{b_p} t^{a_1 a_2 \dots a_p}$$

(w sumie możemy przemianować a_1 na a_2 i a_2 na a_1 , bo to są wskaźniki nieme)

$$= \sum_a U_{a_2}^{b_2} U_{a_1}^{b_1} U_{a_3}^{b_3} \dots U_{a_p}^{b_p} t^{a_2 a_1 \dots a_p} =$$

(na podstawie symetrii współrzędnych $t^{a_2 a_1 \dots a_p}$)

$$= \sum_a U_{a_2}^{b_2} U_{a_1}^{b_1} U_{a_3}^{b_3} \dots U_{a_p}^{b_p} t^{a_1 a_2 \dots a_p} = k^{b_1 b_2 \dots b_p},$$

c.b.d.o.

W tym miejscu wypada przypomnieć o towarzyszącej nam przez cały czas możliwości podwójnej interpretacji wszystkich sformułowań: biernej i czynnej. W interpretacji biernej każde przekształcenie grupowe sprowadza się do odpowiedniej manipulacji dwoma spinorami bazowymi $|\alpha_1\rangle$ i $|\alpha_2\rangle$ w każdym egzemplarzu przestrzeni S (i — jeśli trzeba — przestrzeni \dot{S}). Cała reszta jest wtedy skutkiem tej manipulacji; w szczególności współrzędne $k^{b_1 b_2 \dots b_p}$ i $t^{a_1 a_2 \dots a_p}$ z powyższych wzorów oznaczają wtedy ten sam tensor, a zmiana trójwymiarowego układu odniesienia bierze się stąd, że traktujemy ten układ jako "zrobiony" z obiektów $|\alpha_1\rangle$ i $|\alpha_2\rangle$ (oraz ich odpowiedników z przestrzeni \dot{S}). W interpretacji czynnej używamy co prawda częściowo tych samych formuł, ale znaczą one co innego. Obiekty bazowe $|\alpha_1\rangle$ i $|\alpha_2\rangle$ (a wraz z nimi bazy trój- i czterowymiarowe) nie ulegają zmianie. Równocześnie zmiana liczb "t" na "k" oznacza wtedy przejście do innego tensora. Stwierdzenie: "podprzestrzeń tensorów symetrycznych jest niezmiennicza względem omawianej grupy" lepiej co prawda brzmi w reprezentacji czynnej niż biernej (grupa w swoim działaniu czynnym jest wewnętrzna w podprzestrzeni tensorów symetrycznych), interpretacja bierna jest jednak równie uprawniona: jeżeli w bazie wyjściowej tensor miał współrzędne symetryczne, to po zmianie bazy generowanej przez dowolny element grupy ten sam tensor będzie nadal miał współrzędne symetryczne.

Nasza reprezentacja działa więc wewnątrz podprzestrzeni symetrycznej przestrzeni S^p . Dowodzi się, że jest to reprezentacja nieredukowalna.

Samo przekształcenie grupowe w przestrzeni S^p reprezentowane jest oczywiście odpowiednimi iloczynami elementów macierzy U występującymi w powyższych wzorach. Jeżeli chcielibyśmy "na siłę" otrzymać macierz o rozmiarach $2^p \times 2^p$ (2^p to wymiar przestrzeni S^p) działającą w przestrzeni S^p , to trzeba by współrzędne tensorów t ustawić w kolumny według jakiegoś rozsądnego schematu — kolumna będzie liczyła 2^p elementów — i wówczas macierz przekształcenia o rozmiarach $2^p \times 2^p$ będzie jak mozaika ułożona z elementarnych macierzy 2×2 reprezentujących grupę $SU(2)$ w przestrzeni S . Taka reprezentacja odnosi się oczywiście do bazy złożonej z tensorów $|\alpha_{a_1}\rangle \otimes |\alpha_{a_2}\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_{a_p}\rangle$ w przestrzeni S^p , które — jak łatwo sprawdzić — w większości nie należą do podprzestrzeni tensorów symetrycznych. W S^p trzeba dopiero wybrać podprzestrzeń tensorów symetrycznych opartą na bazie złożonej z wszystkich zsymetryzowanych iloczynów $Sym|\alpha_{a_1}\rangle \otimes |\alpha_{a_2}\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_{a_p}\rangle$.

P r z y k ł a d ($p=3$):

W ośmiowymiarowej przestrzeni ($2^3 = 8$) napiętej na bazie $|\alpha_{a_1}\rangle \otimes |\alpha_{a_2}\rangle \otimes |\alpha_{a_3}\rangle$ dla wszystkich możliwych trójek liczb a_1, a_2, a_3 (jest ich osiem) trzeba wyodrębnić podprzestrzeń tensorów symetrycznych. Będą to wszystkie kombinacje liniowe $\sum_a s^{a_1 a_2 a_3} |\alpha_{a_1}\rangle \otimes |\alpha_{a_2}\rangle \otimes |\alpha_{a_3}\rangle$ z symetrycznymi względem przestawień wskaźników współczynnikami $s^{a_1 a_2 a_3}$ albo — co na jedno wychodzi — kombinacje liniowe zsymetryzowanych iloczynów $Sym|\alpha_{a_1}\rangle \otimes |\alpha_{a_2}\rangle \otimes |\alpha_{a_3}\rangle$ z dowolnymi współczynnikami (współrzędnymi) $t^{a_1 a_2 a_3}$. Przez $Sym|\alpha_{a_1}\rangle \otimes |\alpha_{a_2}\rangle \otimes |\alpha_{a_3}\rangle$ rozumiemy tensory $\sum_{b_1, b_2, b_3} |\alpha_{b_1}\rangle \otimes |\alpha_{b_2}\rangle \otimes |\alpha_{b_3}\rangle$ z sumowaniem po wszystkich r ó ż n y c h kolejnościach ustawienia liczb b_1, b_2, b_3 (patrz przykład niżej). Przyjmiemy tu powszechnie używane oznaczenia dla spinorów bazowych w S :

$$\begin{aligned} |\alpha_1\rangle &\equiv |+\rangle \quad (\text{spin do góry}), \\ |\alpha_2\rangle &\equiv |-\rangle \quad (\text{spin w dół}). \end{aligned}$$

Część symetryczna przestrzeni S^p jest więc napięta na $p+1$ tensorach bazowych (współczynnik N odpowiada za normalizację)

$$N \cdot Sym \underbrace{|\underbrace{+\rangle \otimes |+\rangle \otimes \dots \otimes |+\rangle}_r \otimes \underbrace{|-\rangle \otimes |-\rangle \otimes \dots \otimes |-\rangle}_s}, \quad r + s = p$$

dla r zmieniającego się od zera do p , gdzie np. dla $p=3$ mielibyśmy cztery wektory bazowe podprzestrzeni symetrycznej. Pierwsze dwa są postaci

$$\begin{aligned} Sym|+\rangle|+\rangle|+\rangle &\equiv |+\rangle|+\rangle|+\rangle, \\ Sym|+\rangle|+\rangle|-\rangle &\equiv |+\rangle|+\rangle|-\rangle + |+\rangle|-\rangle|+\rangle + |-\rangle|+\rangle|+\rangle, \end{aligned}$$

gdzie w każdym iloczynie po prawej stronie pierwszy spinor należy do pierwszej przestrzeni S , drugi do drugiej, trzeci do trzeciej, są to więc trzy różne wektory. Podobnie otrzymamy dwa pozostałe tensory: $Sym|+\rangle|-\rangle|-\rangle$ oraz $|-\rangle|-\rangle|-\rangle$. Podprzestrzeń symetrycznych tensorów zawarta w S^3 jest więc czterowymiarowa. Normalizacja polega na pomnożeniu tensora $Sym|+\rangle \dots |+\rangle|-\rangle \dots |-\rangle$ przez odwrotność pierwiastka z liczby składników po prawej stronie. Na przykład unormowane są tensory bazowe: $|+\rangle|+\rangle|+\rangle$,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} Sym|+\rangle|+\rangle|-\rangle, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} Sym|+\rangle|-\rangle|-\rangle \quad \text{oraz} \quad |-\rangle|-\rangle|-\rangle.$$

Składników w każdej sumie "symetryzującej" jest tyle, na ile sposobów można ustawić kolejność w zbiorze złożonym z r nierozróżnialnych elementów jednego rodzaju i s nierozróżnialnych elementów drugiego rodzaju, czyli jest ich $\binom{r+s}{r} = \binom{p}{r}$. Tak więc $N = \binom{p}{r}^{-\frac{1}{2}}$.

Przestrzeń reprezentacji będąca symetryczną częścią iloczynu S^p jest $(p+1)$ wymiarowa. Wektory bazy tej przestrzeni (w liczbie $p+1$):

$$\binom{r+s}{r}^{-\frac{1}{2}} \text{Sym}|+\rangle^r \otimes |-\rangle^s$$

mogą być numerowane na przykład liczbą r (liczba "plusów" w iloczynie) zmieniającą się od zera do p .

Rozważmy teraz przestrzeń, w której działają operatory momentu pędu $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$. Traktując te operatory (na razie na wyrost, bo jeszcze tego nie pokazaliśmy) jako pomnożone przez \hbar generatory rozumianej czynnie grupy obrotów, możemy się łatwo przekonać, że $2j+1$ wymiarowa podprzestrzeń napięta na stanach $|j, m\rangle$ z ustalonym j stanowi przestrzeń reprezentacji grupy. Każdą nieskończenie małą transformację z grupy da się bowiem rozłożyć na transformacje elementarne $1 + i\hat{J}_k \alpha$. Dlatego wystarczy pokazać, że generatory działają wewnątrz wspomnianej $(2j+1)$ wymiarowej podprzestrzeni, a to z kolei wynika trywialnie z zapisu

$$\hat{J}_x = \frac{1}{2}(\hat{J}_+ + i\hat{J}_-), \quad \hat{J}_y = \frac{1}{2}(\hat{J}_+ - i\hat{J}_-).$$

Mamy więc przestrzeń reprezentacji. Dowodzi się, że jest to przestrzeń reprezentacji nieredukowalnej. (Intuicyjnie rzecz wydaje się oczywista: obracając obiektem o danym kwadracie momentu pędu na wszystkie możliwe sposoby, wyczerpiemy na pewno wszystkie możliwe rzuty tego momentu pędu na oś z-ów, chociaż kwantowo rzecz nie wygląda tak banalnie. Wszak przejścia od stanu o określonym rzucie do stanu o innym określonym rzucie realizują operatory \hat{J}_+ i \hat{J}_- , a to nie są obroty! Wyjaśnienie tego pozornego paradoksu jest następujące: w mechanice kwantowej nie ma stanów o określonym kwadracie momentu pędu i określonych wszystkich trzech rzutach. Określony może być tylko jeden z rzutów, na przykład na oś "z", co można sobie naiwnie wyobrazić jako precesję klasycznego wektora momentu pędu wokół wybranej osi. Nie dziwi zatem, że nie istnieje taki czynny obrót, który wykonany na powyższym obiekcie fizycznym przetransformowałby go tak, aby jego stan odpowiadał momentowi pędu o innym rzucie na oś "z".)

Jak pamiętamy z podstawowego kursu mechaniki kwantowej, tzw. "składanie momentów pędu" polega na mnożeniu tensorowym dwóch przestrzeni napiętych — odpowiednio — na wektorach $|j_1, m_1\rangle$, $m_1 = -j_1, \dots, j_1$ i wektorach $|j_2, m_2\rangle$, $m_2 = -j_2, \dots, j_2$ (por. *Dodatek*). Iloczyn tensorowy tych dwóch przestrzeni okazuje się sumą prostą kilku przestrzeni: pierwszej napiętej na wektorach $|j_1, j_2; j_1 + j_2, m\rangle$, $m = -(j_1 + j_2), \dots, (j_1 + j_2)$, drugiej napiętej na wektorach $|j_1, j_2; j_1 + j_2 - 1, m\rangle$, $m = -(j_1 + j_2 - 1), \dots, (j_1 + j_2 - 1)$ itd.; ostatnia odpowiadała parametrowi j równemu $|j_1 - j_2|$. Każda z tych podprzestrzeni stanowi nieredukowalną reprezentację grupy obrotów, czyli $(2j_1+1)(2j_2+1)$ -wymiarowa przestrzeń napięta na wektorach $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ okazuje się przestrzenią redukowalnej reprezentacji grupy obrotów i da się przedstawić jako suma prosta kilku przestrzeni reprezentacji nieredukowalnych numerowanych parametrem j dla wartości od $j = j_1 + j_2$ do $j = |j_1 - j_2|$.

Ostatnie uwagi o operatorach momentów pędu w przestrzeni Hilberta mają związek z omawianym tematem. Weźmy bowiem np. $p = 2$, czyli rozważmy przestrzeń $S \otimes S$. Symetryczna podprzestrzeń tej

przestrzeni napięta jest na tensorach $|+\rangle \otimes |+\rangle$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle + |-\rangle \otimes |+\rangle)$ oraz $|-\rangle \otimes |-\rangle$. W języku składania momentów pędu zapiszemy te wektory jako $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle)$, $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$, i to, co wcześniej nazywaliśmy współczynnikami normalizacji, okazuje się współczynnikami Clebscha–Gordana dla składania momentów pędu $j_1 = \frac{1}{2}$, $j_2 = \frac{1}{2}$. (Warto złożyć momenty pędu $j_1 = \frac{1}{2}$ i $j_2 = \frac{1}{2}$ i porównać.)

Operację składania momentów pędu możemy odwrócić. Dany wyjściowy stan $|j, m\rangle$ możemy potraktować jako złożony z dwóch momentów pędu j_1, j_2 , np. $j = j_1 + j_2$, jak w pierwszej kolumnie stanów (składając momenty pędu ustawialiśmy wektory nowej bazy w tabelę o kształcie trapezu — chodzi o pierwszą kolumnę tej tabeli, por. *Dodatek*, str. 100):

$$|j_1, j_2, j, m\rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 + m_2 = m}} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_1, j_2, j, m \rangle |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle;$$

$$j = j_1 + j_2.$$

Z kolei każdy stan $|j_1, m_1\rangle$ i $|j_2, m_2\rangle$ występujący w powyższej sumie możemy dalej rozłożyć na "drobniejsze" j -ty itd., aż wszystko rozłożymy na stany $|+\rangle$ i $|-\rangle$. Dostaniemy po prawej stronie sumę iloczynów stanów $|+\rangle$ i $|-\rangle$. Każdy z tych iloczynów będzie zawierał łącznie p wektorów $|+\rangle$ lub $|-\rangle$, gdzie $p \cdot \frac{1}{2} = j$. Rozważane wcześniej reprezentacje nieredukowalne grupy obrotów budowane na podprzestrzeniach symetrycznych różnych przestrzeni S^p (dla różnych p) są właśnie przestrzeniami reprezentacji napiętymi na stanach o ustalonym j , gdzie $p \cdot \frac{1}{2} = j$. Przyjmiemy bez dowodu, że wektory bazowe

$$\binom{p}{r}^{\frac{1}{2}} \text{Sym}|+\rangle^{p-r} \otimes |-\rangle^r$$

są wektorami własnymi operatora \hat{J}^2 do wartości własnych $j(j+1)$ oraz operatora \hat{J}_z do wartości własnych $m = (p-r) \cdot \frac{1}{2} + r \cdot (-\frac{1}{2}) = \left(\frac{p}{2} - r\right)$, gdzie oczywiście $\hat{J} \equiv \frac{1}{2} \hat{\sigma}_1 + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_2 + \dots + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_p$, a operatory $\hat{\sigma}$ działają w odpowiednich przestrzeniach S pełniąc tam obowiązki generatorów grupy obrotów i w bazach złożonych ze znanych spinorów $|\alpha\rangle$ przyjmują postać macierzy Pauliego.

ZADANIE — p r z y k ł a d

Korzystając z tablic współczynników Clebscha zapisz stany $|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle$, $|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, $|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$, $|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle$ jako kombinacje liniowe stanów $|1, m_1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, m_2\rangle$, a następnie w tych kombinacjach z kolei stany $|1, m_1\rangle$ rozłóż na stany $|\frac{1}{2}, m\rangle$, czyli stany $|+\rangle$ i $|-\rangle$. W ten sposób zapiszemy każdy z czterech wyjściowych stanów jako sumę iloczynów liczących po trzy stany $|+\rangle$ lub $|-\rangle$. Współczynniki tego rozkładu powstaną z odpowiednich współczynników Clebscha. Porównaj je ze współczynnikami kombinatorycznymi. Sprawdź, że istotnie

$$m = (\text{liczba "plusów"}) \cdot \frac{1}{2} + (\text{liczba "minusów"}) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right),$$

czyli że $m = \frac{p}{2} - r$. Tabelę współczynników Clebscha można znaleźć np. w podręczniku Schiffa na str. 197.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle &= |1, 1\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = |+\rangle |+\rangle |+\rangle, \text{ bo } |1, 1\rangle = |+\rangle |+\rangle, \\ \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle |-\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle |+\rangle \right] |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |+\rangle |+\rangle |-\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} |+\rangle |-\rangle |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |-\rangle |+\rangle |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |+\rangle |+\rangle |-\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Sym}(|+\rangle |+\rangle |-\rangle); \quad p=3, \quad r=1, \quad \binom{3}{r} = 3. \end{aligned}$$

Podobnie otrzymamy

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} |+\rangle |-\rangle |-\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |-\rangle |+\rangle |-\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |-\rangle |-\rangle |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Sym}(|+\rangle |-\rangle |-\rangle), \\ \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle &= |-\rangle |-\rangle |-\rangle. \end{aligned}$$

Przestrzenie napięte na kompletach złożonych z $2j+1$ stanów $|j, j\rangle, \dots, |j, -j\rangle$ utożsamiliśmy z podprzestrzeniami symetrycznymi przestrzeni S^p , gdzie $j = \frac{p}{2}$. Pozwala to udzielić odpowiedzi na centralne pytanie tego rozdziału:

JAK TRANSFORMUJĄ SIĘ STANY $|j, m\rangle$ POD WPŁYWEM OBROTÓW?

Możliwość tę mieliśmy w zasadzie już wcześniej, gdy założyliśmy, że operatory \hat{J} (działające w przestrzeni Hilberta na stany $|j, m\rangle$ i ich kombinacje) są generatorami grupy obrotów. Wtedy jednak było to tylko założenie. Teraz zaś potrafimy to już udowodnić:

Jeżeli w każdej przestrzeni S generatorami obrotów są operatory $\frac{1}{2} \hat{\sigma}_x, \frac{1}{2} \hat{\sigma}_y, \frac{1}{2} \hat{\sigma}_z$, to w przestrzeni S^p generatorami okażą się operatory

$$\hat{J}_x = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{x1} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{x2} + \dots + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{xp}$$

i podobnie dla \hat{J}_y oraz \hat{J}_z . Jeżeli bowiem na przykład obracamy układ odniesienia lub obiekt fizyczny wokół osi "x" o kąt $d\alpha$, to operator transformacji w przestrzeni S ma postać $\hat{1} + i\frac{1}{2} \hat{\sigma}_x d\alpha$, a w przestrzeni S^p przyjmie postać

$$\left(\hat{1} + \frac{i}{2} \hat{\sigma}_{x1} d\alpha \right) \left(\hat{1} + \frac{i}{2} \hat{\sigma}_{x2} d\alpha \right) \dots \left(\hat{1} + \frac{i}{2} \hat{\sigma}_{xp} d\alpha \right) = \hat{1} + \frac{i}{2} (\hat{\sigma}_{x1} + \hat{\sigma}_{x2} + \dots + \hat{\sigma}_{xp}) d\alpha + 0(d\alpha)^2.$$

Teraz dopiero pokazaliśmy, że operatory $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$ są rzeczywiście generatorami grupy obrotów w przestrzeni Hilberta.

Powyższe pytanie o transformowanie się stanów $|j, m\rangle$ ma sens zarówno bierny, jak czynny, o czym niżej. Możliwość udzielenia na nie odpowiedzi wynika z tego, że każdy stan $|j, m\rangle$ potrafimy zbudować ze stanów $|+\rangle$ i $|-\rangle$, a te ostatnie transformują się w sposób, który kontrolujemy. Skoro grupa obrotów działa wewnątrz $(2j+1)$ -wymiarowej przestrzeni napiętej na wektorach $|j, m\rangle$, $m = -j, \dots, +j$, to w szczególności wynik obrotu czynnego wykonanego na danym $|j, m\rangle$ musi być superpozycją wszystkich stanów $|j, m'\rangle$, $m' = -j, \dots, +j$.

$$\hat{O}(\alpha, \beta, \gamma)|j, m\rangle = \sum_{m'=-j}^{+j} D_{mm'}^j(\alpha, \beta, \gamma)|j, m'\rangle,$$

gdzie $(2j+1)^2$ funkcji $D_{mm'}^j(\alpha, \beta, \gamma)$ reprezentuje grupę obrotów w podprzestrzeni napiętej na stanach $|j, m\rangle$ dla ustalonego j , a zmienne α, β, γ to dowolnie zdefiniowane parametry ustalające obrót, na przykład kąty Eulera.

Teraz — dla ćwiczenia — zinterpretujmy tę reprezentację biernie i czynnie:

1. Biernie

Posługując się abstrakcyjnym operatorem \hat{U} , wykonujemy w \mathcal{S} (a także w $\hat{\mathcal{S}}$) odpowiedni manewr spinorami $|\alpha\rangle$. (Warto pamiętać, że $|\alpha_1\rangle = |+\rangle$, $|\alpha_2\rangle = |-\rangle$. Pamiętajmy też, że w \hat{J}_z przyporządkowanie jest inne, do czego jeszcze wrócimy.) Na skutek tego manewru zrobiona z tych spinorów baza $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ wykonuje obrót.

Wytworzony w laboratorium stan $|j, m\rangle \equiv | \rangle$ (konkretne "j" i konkretne "m"), który właśnie ma tu być poddany biernej transformacji, usadowiony jest w postaci odpowiedniego wektora w przestrzeni Hilberta i "niczego nie wie" o manewrach bazą w \mathcal{S} oraz o obrocie bazy $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Jednak obserwator związany z obróconym układem odniesienia na ogół nie nazwie już tego stanu stanem $|j, m\rangle$, bo na przykład jego (obserwatora) oś z-ów skierowana jest na ogół w inną stronę, niż przedtem. Uznawane przez niego nowe stany własne momentu pędu (nazwijmy je $|j, m'\rangle'$) są zbudowane z nowych spinorów bazowych (nazwijmy je $|+\rangle', |-\rangle'$; $|+\rangle' = \hat{O}|+\rangle$, $|-\rangle' = \hat{O}|-\rangle$) w taki sposób, jak stare stany $|j, m\rangle$ były zrobione ze spinorów $|+\rangle, |-\rangle$. W interpretacji biernej zapiszemy więc (obrot działają wewnątrz podprzestrzeni napiętej na stanach $|j, m\rangle$ z ustaloną wartością j — por. str. 74)

$$| \rangle = \sum_{m'=-j}^{+j} D_{mm'}^j(\alpha, \beta, \gamma) \underbrace{|j, m'\rangle'}_{\substack{\text{stany odnoszące} \\ \text{się do układu} \\ \text{odniesienia } \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'}}.$$

Prawa strona wygląda jak iloczyn m-go wiersza pewnej macierzy przez kolumnę złożoną z wektorów $|j, m'\rangle'$ (wskaźnik m' jest martwy). Parametr m po prawej stronie "pamięta", jaki stan jest poddawany transformacji biernej.

Zwróćmy uwagę, że "bierność" rozważanej transformacji przeniosła się z przestrzeni trójwymiarowej do przestrzeni Hilberta: wektor stanu, którego bierną transformację opisujemy, "ani drgnął" na jej skutek; manewr wykonała tylko baza $\{|j, m\rangle\}$.

2. Czynnie

Chcemy teraz pozostawić wszystkie bazy w spokoju: nie zmienia się baza w S ani baza $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Mamy stan $|j, m\rangle$. Co będzie, gdy obiekt fizyczny, którego stan jest opisany w przestrzeni Hilberta wektorem $|j, m\rangle$, obrócimy w stosunku do układu odniesienia $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ tak, aby w efekcie obiekt fizyczny i układ pozostawały w stosunku do siebie w takiej relacji, w jakiej były one po obrocie układem odniesienia $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ rozważanym w wersji biernej? Jakim wektorem w przestrzeni Hilberta należy opisać stan tak obróconego obiektu?

Odpowiedzi na to pytanie udziela rozważone wcześniej podejście bierne. Otóż obrót czynny wykonany na $|j, m\rangle$ to jest z d e f i n i c j i przejście do takiego nowego wektora $\hat{O}|j, m\rangle$ w przestrzeni Hilberta, który wyraża się przez wektory bazowe $|j, m'\rangle$ wzorem (stan $|j, m\rangle$ po lewej stronie to jeden ze stanów $|j, m'\rangle$ występujących po stronie prawej)

$$\hat{O}(\alpha, \beta, \gamma)|j, m\rangle = \sum_{m'=j}^{-j} D_{mm'}^j(\alpha, \beta, \gamma)|j, m'\rangle,$$

odniesione do tej samej osi z-ów! (jest zresztą tylko jedna, bo baza się nie zmienia)

który obowiązuje dla każdego $m = +j, \dots, -j$ oddzielnie. Całą tę rodzinę wzorów można ująć w formie macierzowej

$$\begin{pmatrix} \hat{O}|j, j\rangle \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{O}|j, -j\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} D_{m,m'} \begin{pmatrix} |j, j\rangle \\ \cdot \\ \cdot \\ |j, -j\rangle \end{pmatrix}.$$

Pozostaje nam teraz ustalić związek między złożonymi z $(2j+1) \times (2j+1)$ funkcji macierzami $D_{mm'}^j(\alpha, \beta, \gamma)$ a znanymi nam macierzami U reprezentującymi obroty w S . Najpierw trzeba jakoś wybrać trzy parametry opisujące obrót. Przyjęły się kąty Eulera α, β, γ zdefiniowane następująco (na chwilę "myślimy biernie", czyli kręcimy układem odniesienia):

1. Obracamy układem wokół osi "z" o kąt α w kierunku takim, aby oś "x" obracała się w kierunku starej osi "y", czyli "w lewo".

2. Teraz obracamy układ odniesienia wokół nowej osi "y" o kąt β "w lewo".

3. Na koniec obracamy wokół nowej (aktualnej) osi "z" o kąt γ "w lewo".

W ten sposób da się zrealizować każdy obrót. W opisanej tu biernej wersji obrotu kręciliśmy układem odniesienia, obiekt pozostawiając w spokoju. Chcąc zrealizować to samo, ale w wersji czynnej, musimy utworzyć (w wyobraźni) kopię $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ układu odniesienia $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, którą wiążemy sztywno z obiektem. Przed czynnymi obrotami układ i jego kopia pokrywają się.

Obiektem obracamy "pokręcając" za osie kopii — obiekt kręci się wraz z kopią, bo jest na nią nanizany na podobieństwo pieczeni — w tym czasie właściwy układ odniesienia $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ nie doznaje żadnych zmian. Kręcić trzeba o kąty $(-\gamma)$ wokół osi "z" kopii, $(-\beta)$ wokół osi "y" kopii i w końcu o kąt $(-\alpha)$ wokół osi "z" kopii (czyli — według naszej terminologii — "w prawo"), w takiej, jak podano, kolejności. Droga do zrozumienia, skąd bierze się konieczność odwrócenia kolejności, jest dobrym ćwiczeniem na wyobraźnię przestrzenną. Rozumowanie ułatwi następująca uwaga:

Po dokonaniu obrotu czynnego obiekt ma być tak ustawiony w stosunku do niezmienionej bazy $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, jak w przypadku obrotu biernego niezmieniony obiekt był ustawiony względem obróconej bazy $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$. Łatwo zrozumieć, że po opisanych wyżej obrotach "pieczenia" o kąty $-\gamma, -\beta, -\alpha$ tak jest w istocie.

Przytrzymajmy bowiem teraz obróconą pieczęń ręką, a obracajmy kopią "w lewo" o kąty kolejno α, β, γ : kopia wtopi się z powrotem w bazę, co oznacza, że pieczęń została ustawiona w stosunku do bazy tak, jak należało.

Obliczanie funkcji $D_{mm'}^j(\alpha, \beta, \gamma)$ zaczniemy od tych opisujących transformowanie się obiektów podstawowych $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = |+\rangle$ oraz $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = |-\rangle$ traktowanych jako stany $|j, m\rangle$ dla $j = \frac{1}{2}$. Jak wiemy, bierny obrót układu $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ o kąt α wokół osi "z" nastąpi, gdy w przestrzeni S przekształcimy bazę $|+\rangle, |-\rangle$ w taki sposób, że współrzędne $\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}$ wszystkich spinorów z przestrzeni S zmienią się zgodnie ze wzorem

$$\begin{pmatrix} \xi^{1'} \\ \xi^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}.$$

Jeżeli więc na przykład w roli transformowanego biernie wektora $|j, m\rangle$ wystąpi wektor pokrywający się z wektorem starej bazy $|+\rangle$ (czyli $j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}$), to jego współrzędne przed "obrotem" bazy w S mają postać $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, a po "obrocie" zmieniają się w $\begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, czyli

$$|j, m\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \equiv |+\rangle = e^{i\frac{\alpha}{2}} |+\rangle' + 0 \cdot |-\rangle'.$$

Stąd

$$D_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\alpha, 0, 0) = e^{i\frac{\alpha}{2}}, \quad D_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\alpha, 0, 0) = 0.$$

Podobnie

$$|j, m\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \equiv |-\rangle = 0 \cdot |+\rangle' + e^{-i\frac{\alpha}{2}} |-\rangle',$$

czyli

$$D_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\alpha, 0, 0) = 0, \quad D_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\alpha, 0, 0) = e^{-i\frac{\alpha}{2}}.$$

Zbadajmy teraz osobno obrót " β ". Kręcimy bazą $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ wokół osi "y" o kąt β i wraz z tym transformują się wektory bazowe $|+\rangle$ i $|-\rangle$ w S , przechodząc w $|+\rangle'$ i $|-\rangle'$. Po tym zabiegu

$$|j, m\rangle = |+\rangle = 1 \cdot |+\rangle + 0 \cdot |-\rangle = \xi^{1'} |+\rangle' + \xi^{2'} |-\rangle',$$

gdzie

$$\begin{pmatrix} \xi^{1'} \\ \xi^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & \sin \frac{\beta}{2} \\ -\sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} \\ -\sin \frac{\beta}{2} \end{pmatrix},$$

czyli

$$|+\rangle = \cos\frac{\beta}{2}|+\rangle' - \sin\frac{\beta}{2}|-\rangle',$$

co oznacza, że

$$D_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(0,\beta,0) = \cos\frac{\beta}{2}, \quad D_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(0,\beta,0) = -\sin\frac{\beta}{2}$$

i podobnie zmiana współrzędnych spinora $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \equiv |-\rangle$ przy takim obrocie wyrazi się wzorem

$$|-\rangle = 0 \cdot |+\rangle + 1 \cdot |-\rangle = \xi' |+\rangle' + \xi'' |-\rangle',$$

gdzie

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \xi'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & \sin\frac{\beta}{2} \\ -\sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\frac{\beta}{2} \\ \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix},$$

czyli

$$|-\rangle = \sin\frac{\beta}{2}|+\rangle' + \cos\frac{\beta}{2}|-\rangle',$$

a więc

$$D_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(0,\beta,0) = \sin\frac{\beta}{2}, \quad D_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(0,\beta,0) = \cos\frac{\beta}{2}.$$

Widać stąd, że macierze $D^{\frac{1}{2}}$ są transponowane w stosunku do odpowiednich macierzy U .

Teraz wykonajmy bierny obrót Eulera $(\alpha, \beta, 0)$ na stanie $|\frac{1}{2}, m\rangle$. Obracamy o kąt α

$$|\frac{1}{2}, m\rangle = \sum_{m'} D_{m,m'}^{\frac{1}{2}}(\alpha, 0, 0) |\frac{1}{2}, m'\rangle',$$

a teraz o kąt β , czyli

$$|\frac{1}{2}, m'\rangle' = \sum_{m''} D_{m',m''}^{\frac{1}{2}}(0, \beta, 0) |\frac{1}{2}, m''\rangle''.$$

Spinory $|\frac{1}{2}, m'\rangle'$ to spinory bazy "obróconej" w S w taki sposób, aby baza $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ wykonała obrót " α ".

Spinory $|\frac{1}{2}, m''\rangle''$ to baza w S po tym, jak baza $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ po obrocie " α " wykonała obrót " β ".

Mamy więc

$$|\frac{1}{2}, m\rangle = \sum_{m',m''} D_{m,m'}^{\frac{1}{2}}(\alpha, 0, 0) D_{m',m''}^{\frac{1}{2}}(0, \beta, 0) |\frac{1}{2}, m''\rangle''.$$

Widać już, że dla pełnej transformacji (α, β, γ) będziemy mieli

$$\left| \frac{1}{2}, m \right\rangle = \sum_{m'} D_{m,m'}^{\frac{1}{2}}(\alpha, \beta, \gamma) \left| \frac{1}{2}, m' \right\rangle,$$

gdzie

$$D_{m,m'}^{\frac{1}{2}}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{m_1, m_2} D_{m,m_1}^{\frac{1}{2}}(\alpha, 0, 0) D_{m_1, m_2}^{\frac{1}{2}}(0, \beta, 0) D_{m_2, m'}^{\frac{1}{2}}(0, 0, \gamma)$$

a przez $\left| \frac{1}{2}, m' \right\rangle$ oznaczyliśmy bazę w S , jaką mamy po wykonaniu obrotów (α, β, γ) bazą $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Stąd pełna macierz $D_{m,m'}^{\frac{1}{2}}(\alpha, \beta, \gamma)$ ma postać

$$\begin{aligned} \left\{ D_{m,m'}^{\frac{1}{2}}(\alpha, \beta, \gamma) \right\} &= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & -\sin \frac{\beta}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\gamma}{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \cos \frac{\beta}{2} & -e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}} \sin \frac{\beta}{2} \\ e^{i\frac{\gamma-\alpha}{2}} \sin \frac{\beta}{2} & e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jeszcze jedna uwaga na temat wersji czynnej obrotu:

$$\hat{O} |j, m\rangle = \sum_{m'} D_{m,m'}^j(\alpha, \beta, \gamma) |j, m'\rangle.$$

Jeżeli $|j, m\rangle$ oznaczają stany własne orbitalnego momentu pędu, to można napisać

$$\langle \vec{x} | \hat{O} |j, m\rangle = \sum_{m'} D_{m,m'}^j(\alpha, \beta, \gamma) \langle \vec{x} | j, m'\rangle = \sum_{m'} D_{m,m'}^j(\alpha, \beta, \gamma) Y_{j,m'}(\theta, \varphi).$$

Obydwie strony tej równości to funkcja falowa stanu, któremu przed czynnym obrotem obiektu fizycznego odpowiadała funkcja kulista $Y_{j,m}(\theta, \varphi) \equiv \langle \vec{x} | j, m\rangle$.

ZADANIE

Oblicz macierz $D_{m,m'}^1(\alpha, \beta, \gamma)$. Przeprowadź to rozumowanie w wersji czynnej.

Rozwiązanie:

$$\hat{O} |1, m\rangle = \sum_{m'=1}^{-1} D_{m,m'}^1(\alpha, \beta, \gamma) |1, m'\rangle; \quad m = 1, 0, -1.$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &= \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right), \end{aligned}$$

$$|1, -1\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle;$$

(tam, gdzie nie grozi to nieporozumieniem, opuszczamy znaki mnożenia tensorowego)

$$\hat{O}|1,1\rangle = \hat{O}\left(\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle\right) = \hat{O}\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \hat{O}\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

(wspólnym symbolem \hat{O} oznaczyliśmy tu reprezentantów tej samej transformacji grupowej w dwóch różnych przestrzeniach, co nie grzeszy nadmiarem elegancji)

$$\begin{aligned} &= \sum D_{\frac{1}{2}, m'}^{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2}, m' \right\rangle \otimes \sum D_{\frac{1}{2}, m''}^{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2}, m'' \right\rangle \\ &= \sum_{m', m''} D_{\frac{1}{2}, m'}^{\frac{1}{2}} D_{\frac{1}{2}, m''}^{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2}, m' \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, m'' \right\rangle \\ &= D_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| + \right\rangle \left| + \right\rangle + D_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\left| + \right\rangle \left| - \right\rangle + \left| - \right\rangle \left| + \right\rangle \right) + D_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| - \right\rangle \left| - \right\rangle \\ &= D_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| 1, 1 \right\rangle + \sqrt{2} D_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| 1, 0 \right\rangle + D_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| 1, -1 \right\rangle \\ &= D_{1,1}^1 \left| 1, 1 \right\rangle + D_{1,0}^1 \left| 1, 0 \right\rangle + D_{1,-1}^1 \left| 1, -1 \right\rangle. \end{aligned}$$

Możemy więc napisać pierwszy wiersz szukanej macierzy $D_{m,m'}^1$:

$$e^{i(\alpha+\gamma)} \cos^2 \frac{\beta}{2}, \quad -\sqrt{2} e^{i\alpha} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2}, \quad e^{i(\alpha-\gamma)} \sin^2 \frac{\beta}{2},$$

co często zapisuje się w postaci

$$\frac{1}{2} e^{i(\alpha+\gamma)} (1 + \cos \beta), \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha} \sin \beta, \quad \frac{1}{2} e^{i(\alpha-\gamma)} (1 - \cos \beta).$$

Pozostałe dwa wiersze otrzymamy w postaci

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\gamma} \sin \beta, & \cos \beta, & -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\gamma} \sin \beta, \\ \frac{1}{2} e^{-i(\alpha-\gamma)} (1 - \cos \beta), & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\alpha} \sin \beta, & \frac{1}{2} e^{-i(\alpha+\gamma)} (1 + \cos \beta). \end{array}$$

Z powyższego przykładu widać, że znając macierz funkcyjną $D_{m_1, m_2}^{\frac{1}{2}}(\alpha, \beta, \gamma)$ i potrzebne współczynniki Clebscha—Gordana, można obliczyć "wyższe" macierze $D_{m_1, m_2}^j(\alpha, \beta, \gamma)$. W praktyce korzystamy jednak z tablic. Należy jednak zawsze sprawdzać używaną w danym podręczniku konwencję, a w szczególności:

- czy we wzorze $\hat{O}|j, m\rangle = \sum_{m'} D_{m, m'}^j |j, m'\rangle$ sumowane jest po drugim (jak u nas) czy po pierwszym wskaźniku,
- czy kąty Eulera oznaczają obroty wokół osi z, y, z (jak u nas i w większości podręczników), czy wokół z, x, z .

ZADANIE (ważne!)

Trzy obiekty:

$$\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle - |1,-1\rangle),$$

$$\vec{J} = \frac{1}{i\sqrt{2}}(|1,1\rangle + |1,-1\rangle),$$

$$\vec{K} = -|1,0\rangle,$$

obracane czynnie zachowują się tak, jak c z y n n i e obracane wektory \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} . Dlatego mówi się, że stany o momencie pędu $j = 1$ zachowują się jak wektory.

Należy podać program dowodu powyższego stwierdzenia i zrealizować go dla szczególnych obrotów, np. $(\alpha, 0, 0)$, $(0, \beta, 0)$.

R o z w i ą z a n i e :

Ogólny dowód wyglądałby tak:
Korzystając ze wzoru

$$\begin{pmatrix} \hat{O}|1,1\rangle \\ \hat{O}|1,0\rangle \\ \hat{O}|1,-1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & D_{m,m'}^1(\alpha, \beta, \gamma) & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |1,1\rangle \\ |1,0\rangle \\ |1,-1\rangle \end{pmatrix}$$

i z definicji obiektów $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$, dowiadujemy się, jak transformują się te objekty

$$\begin{pmatrix} \hat{O}\vec{I} \\ \hat{O}\vec{J} \\ \hat{O}\vec{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & O_{rs} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{pmatrix}.$$

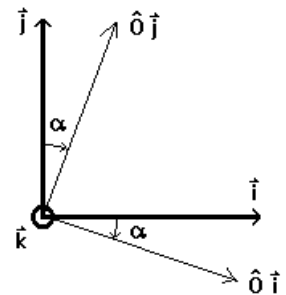
Niezależnie od tego można sprawdzić, jaka jest macierz O' we wzorze

$$\begin{pmatrix} \hat{O}\vec{i} \\ \hat{O}\vec{j} \\ \hat{O}\vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & O'_{rs} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

(gdzie wektory \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} są zwykłymi wersorami bazowymi), jeżeli dokonujemy trzech czynnych obrotów o kąty (α, β, γ) , osobno na wektorze \vec{i} , albo na \vec{j} , albo na \vec{k} . Twierdzenie będzie udowodnione, jeżeli macierze O i O' okażą się jednakowe.

Rozważmy więc obrót $(\alpha, 0, 0)$. Policzmy macierz O' .

(Uwaga! Wektory \vec{i} i \vec{j} widoczne na rysunku są tu przedmiotem transformacji c z y n n e j, stąd obrót o dodatni kąt α wygląda tak, jak narysowano.)



$$\hat{O}\vec{i} = \vec{i} \cos \alpha - \vec{j} \sin \alpha,$$

$$\begin{aligned}\hat{O}\vec{j} &= \vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha, \\ \hat{O}\vec{k} &= \vec{k},\end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \hat{O}\vec{i} \\ \hat{O}\vec{j} \\ \hat{O}\vec{k} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \hat{O}\vec{I} \\ \hat{O}\vec{J} \\ \hat{O}\vec{K} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{O}(|1,1\rangle - |1,-1\rangle) \\ \frac{1}{i\sqrt{2}} \hat{O}(|1,1\rangle + |1,-1\rangle) \\ -\hat{O}|1,0\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{i\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{i\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |1,1\rangle \\ |1,0\rangle \\ |1,-1\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{i\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{i\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{O}|1,1\rangle \\ \hat{O}|1,0\rangle \\ \hat{O}|1,-1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{i\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{i\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^1_{m,m'} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |1,1\rangle \\ |1,0\rangle \\ |1,-1\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{i\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{i\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^1_{m,m'}(\alpha, 0, 0) \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{i\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{i\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ O_{rs} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Obliczmy macierz O :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{i\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{i\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{i\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{i\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv O',$$

c.b.d.o.

Dla obrotu $(0, \beta, 0)$ dostaniemy

$$O' = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix},$$

podczas gdy odpowiednia macierz O przyjmie postać

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{i\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{i\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos\beta) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta & \frac{1}{2}(1-\cos\beta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta & \cos\beta & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta \\ \frac{1}{2}(1-\cos\beta) & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta & \frac{1}{2}(1+\cos\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{i\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{i\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

=(po wymnożeniu)= O' .

Podane w temacie zadania związki między obiektami $|1,m\rangle$ i wektorami $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ są zgodne z konstrukcją czterowektorów bazowych $|\sigma\rangle$ z początku wykładu. Mieliśmy tam bowiem

$$\begin{aligned} |\sigma_x\rangle &= |\alpha_1\rangle|\alpha_2\rangle + |\alpha_2\rangle|\alpha_1\rangle, \\ |\sigma_y\rangle &= i(-|\alpha_1\rangle|\alpha_2\rangle + |\alpha_2\rangle|\alpha_1\rangle), \\ |\sigma_z\rangle &= |\alpha_1\rangle|\alpha_1\rangle - |\alpha_2\rangle|\alpha_2\rangle. \end{aligned}$$

Pamiętamy dalej, że

$$|\alpha_1\rangle = |+\rangle, \quad |\alpha_2\rangle = |-\rangle$$

a także, że

$$\begin{aligned} |\alpha^1\rangle &= |\alpha_2\rangle && \text{opisuje "spin w górę" } (|+\rangle), \\ |\alpha^2\rangle &= -|\alpha_1\rangle && \text{opisuje "spin w dół" } (|-\rangle). \end{aligned}$$

Sprawdziliśmy też, że w przypadku obrotów przestrzennych macierze U działające na współrzędne $\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ są takie same.

Możemy więc napisać

$$\begin{aligned} |\sigma_x\rangle &= |+\rangle|+\rangle - |-\rangle|-\rangle = |1,1\rangle - |1,-1\rangle, \\ |\sigma_y\rangle &= i(-|+\rangle|+\rangle - |-\rangle|-\rangle) = -i(|1,1\rangle + |1,-1\rangle), \\ |\sigma_z\rangle &= -|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle = -\sqrt{2}|1,0\rangle \end{aligned}$$

a to już — z dokładnością do normalizacji — są wektory $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ występujące w temacie zadania. Warto jednak pamiętać, że obiekty $|\sigma\rangle$ pochodzą z przestrzeni $S \otimes \dot{S}$, podczas gdy reprezentacji grupy obrotów szukaliśmy w tym rozdziale w przestrzeniach $S, S \otimes S, S \otimes S \otimes S$ itd. (czyli bez udziału przestrzeni \dot{S}). Dopóki jednak t y l k o o b r a c a m y, to przestrzeń \dot{S} zachowuje się, jak S . Gdybyśmy natomiast chcieli rozważać reprezentacje całej grupy Lorentza, nie moglibyśmy już utożsamiać $S \equiv \dot{S}$.

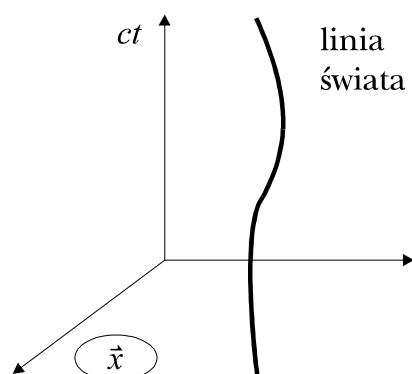
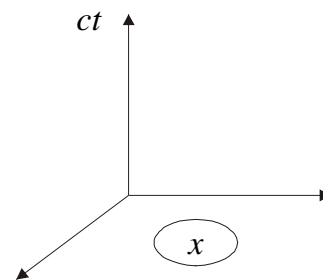
Dodatek **1**

WSPÓŁRZĘDNE KONTRAWARIANTNE I KOWARIANTNE W PRZESTRZENI CZTEROWEKTORÓW

CZASOPRZESTRZEŃ

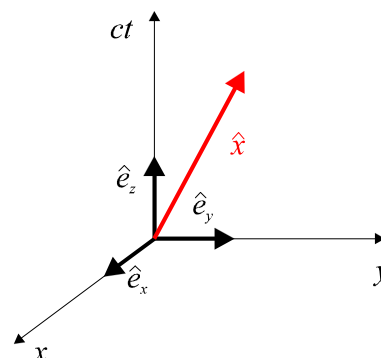
Układ inercjalny, zaopatrzony w zsynchronizowane zegary gęsto rozstawione w przestrzeni, pozwala każdemu punktowemu **zdarzeniu** przypisać cztery liczby określające jego czas i miejsce t, x, y, z .

Wszystkie zdarzenia wypełniają przestrzeń wektorową (czterowymiarową) zwaną **przestrzenią Minkowskiego**¹⁰. Graficzny obraz przestrzeni Minkowskiego, to umowny diagram (brak miejsca na czwarty wymiar, więc na rysunku kasuje się jeden albo i dwa z wymiarów przestrzennych) zawierający prostopadłe do siebie: oś czasu (skalowana zmienną ct) oraz zwykłe osie x, y, z (a dokładniej jedną, lub dwie z nich).



Historia ruchu obiektu punktowego opisana jest w przestrzeni Minkowskiego linią, tzw. **linią świata**, złożoną z tych zdarzeń, które obiekt podczas ruchu kolejno „odwiedził”.

W czterowymiarowej przestrzeni Minkowskiego możemy wprowadzić bazę. Początkiem układu odniesienia jest zdarzenie leżące u zbiegu wszystkich czterech osi. **Czterowektor** bazowy \hat{e}_x wyznaczony jest przez to zdarzenie i przez drugie, równoczesne z nim, "mające miejsce" w przestrzeni trójwymiarowej w punkcie o współrzędnych $x, 0, 0$. Jest to w tym przypadku zwykły wektor przesunięcia



przestrzennego łączący dwa równoczesne zdarzenia odległe o x . Dzieląc ten wektor przesunięcia przez liczbę x (o wymiarze długości) dostajemy bezwymiarowy wektor bazowy \hat{e}_x . Podobnie zdefiniowane są pozostałe przestrzenne czterowektory bazowe \hat{e}_y i \hat{e}_z . Czterowektor czasowy \hat{e}_t

wyznaczony jest przez to samo „wspólne” zdarzenie i drugie, które w sensie przestrzennym jest tam, gdzie to wspólne a w sensie czasowym „dzieje się” o czas t później (odpowiedni wektor „przesunięcia w czasie” dzielimy przez t otrzymując \hat{e}_t). W rachunkach wygodnie jest ponumerować współrzędne i czterowektory bazowe. Zamiast współrzędnych ct, x, y, z napiszemy więc odpowiednio x^0, x^1, x^2, x^3 a czterowektory bazowe oznaczmy kolejno: $\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2$ oraz \hat{e}_3 .

¹⁰ Powszechnie używany w polskiej literaturze termin „zdarzenie” jest równie zgrabny, co nietrafny. W ramach fizyki klasycznej (czyli nie-kwantowej) można sobie bowiem wyobrazić sytuację polegającą na tym, że w danym punkcie \vec{x} i chwili t nie ma niczego i nic się nie dzieje, czyli nie ma zdarzenia. Ci, którzy mają takie wątpliwości, lubią używać określenia **punktochwila**, które — chociaż wysoce nieestetyczne — lepiej oddaje istotę rzeczy.

Czterowektor \hat{x} wskazujący dowolne zdarzenie zapiszemy jako kombinację liniową $\hat{x} = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu \hat{e}_\mu \equiv x^\mu \hat{e}_\mu$

(opuszczanie znaku sumowania $\sum_{\mu=0}^3$ jest w rachunkach relatywistycznych powszechnie przyjętym zwyczajem,

a o konieczności sumowania sygnalizuje wskaźnik powtarzający się na dwóch różnych poziomach).

W tych oznaczeniach naszą szczególną transformację Lorentza zapiszemy wzorami

$$x^{0'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(x^0 - \frac{v}{c} x^1 \right),$$

$$x^{1'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(x^1 - \frac{v}{c} x^0 \right),$$

$$x^{2'} = x^2,$$

$$x^{3'} = x^3.$$

Wypisana tu transformacja współrzędnych zdarzenia opisanego czterowektorem \hat{x} jest skutkiem zmiany bazy w przestrzeni Minkowskiego (czyli zmiany inercjalnego układu odniesienia - rozważamy dwa inercjalne układy odniesienia, których początki mijają się w chwili zero). Tak więc od czterowektorów $\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ przechodzimy do czterowektorów $\hat{e}_{0'}, \hat{e}_{1'}, \hat{e}_{2'}, \hat{e}_{3'}$. Zmiana współrzędnych jest jak widać opisana przekształceniem liniowym

$$x^{\mu'} = A^{\mu'}_{\rho} x^{\rho} \quad (\text{sumowanie po } \rho \text{ od zera do trzech}^{11}), \text{ czyli}$$

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{0'}_0 & A^{0'}_1 & A^{0'}_2 & A^{0'}_3 \\ A^{1'}_0 & A^{1'}_1 & A^{1'}_2 & A^{1'}_3 \\ A^{2'}_0 & A^{2'}_1 & A^{2'}_2 & A^{2'}_3 \\ A^{3'}_0 & A^{3'}_1 & A^{3'}_2 & A^{3'}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \equiv A \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix},$$

skąd możemy odtworzyć związki między starymi i nowymi czterowektorami bazowymi. Mamy bowiem

$$\hat{x} = \hat{e}_\mu x^\mu \equiv \hat{e}_{\mu'} x^{\mu'} = \hat{e}_{\mu'} A^{\mu'}_{\rho} x^{\rho},$$

z czego wynika, że

$$\hat{e}_\rho = \hat{e}_{\mu'} A^{\mu'}_{\rho} \quad (\text{z sumowaniem po } \mu').$$

Warto podkreślić, że pełny zbiór wszystkich możliwych macierzy A , reprezentujących wszystkie możliwe transformacje Lorentza, odpowiada wszystkim parom inercjalnych układów odniesienia, których

¹¹ Stosujemy konwencję, zgodnie z którą gdziekolwiek w jednym czynniku występuje para identycznych wskaźników na dwóch różnych poziomach, tam należy rozumieć obecność sumowania od zera do trzech).

początki mijają się w pewnej punktochwili i których zegary, ustawione w tych początkach, w chwili mijania pokazują godzinę zero.

Umawiamy się, że $A^{\mu}_{\mu'}$ (prim przy dolnym wskaźniku!) oznacza element μ, μ' macierzy odwrotnej do tej, która występuje we wzorze transformacyjnym dla współrzędnych x^{μ} , czyli

$$\begin{pmatrix} A^0_{0'} & A^0_{1'} & A^0_{2'} & A^0_{3'} \\ A^1_{0'} & A^1_{1'} & A^1_{2'} & A^1_{3'} \\ A^2_{0'} & A^2_{1'} & A^2_{2'} & A^2_{3'} \\ A^3_{0'} & A^3_{1'} & A^3_{2'} & A^3_{3'} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A^{0'}_0 & A^{0'}_1 & A^{0'}_2 & A^{0'}_3 \\ A^{1'}_0 & A^{1'}_1 & A^{1'}_2 & A^{1'}_3 \\ A^{2'}_0 & A^{2'}_1 & A^{2'}_2 & A^{2'}_3 \\ A^{3'}_0 & A^{3'}_1 & A^{3'}_2 & A^{3'}_3 \end{pmatrix}^{-1} = A^{-1}.$$

Tak więc A^{μ}_{ν} jest elementem (μ', ν) macierzy A , $A^{\sigma}_{\rho'}$ jest elementem (σ, ρ') macierzy A^{-1} , $A_{\nu}^{\mu'}$ jest elementem (ν, μ') macierzy A^T (czyli $A^{\mu}_{\nu} \equiv A_{\nu}^{\mu'}$) i w końcu $A_{\rho'}^{\sigma}$ jest elementem (ρ', σ) macierzy $(A^{-1})^T$ (czyli $A^{\sigma}_{\rho'} \equiv A_{\rho'}^{\sigma}$)

ZADANIE

Warto sprawdzić, że $A_{\nu}^{\mu'} (= A^{\mu'}_{\nu}) = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}$, gdzie pochodna cząstkowa rozumiana jest w sensie ustalenia trzech pozostałych starych współrzędnych.

Przyjąwszy taką konwencję możemy napisać:

$$\hat{e}_{\mu} = \hat{e}_{\sigma} A^{\sigma}_{\mu} \quad \Rightarrow \quad \hat{e}_{\mu} A^{\mu}_{\rho'} = \hat{e}_{\mu} A^{\mu'}_{\sigma} A^{\sigma}_{\rho'} = \hat{e}_{\mu'} \delta^{\mu'}_{\rho'} = \hat{e}_{\rho'}.$$

W zapisie macierzowym wyglądałoby to tak:

$$(\hat{e}_0 \quad \hat{e}_1 \quad \hat{e}_2 \quad \hat{e}_3) = (\hat{e}_0 \quad \hat{e}_1 \quad \hat{e}_2 \quad \hat{e}_3) \begin{pmatrix} A^0_{0'} & A^0_{1'} & A^0_{2'} & A^0_{3'} \\ A^1_{0'} & A^1_{1'} & A^1_{2'} & A^1_{3'} \\ A^2_{0'} & A^2_{1'} & A^2_{2'} & A^2_{3'} \\ A^3_{0'} & A^3_{1'} & A^3_{2'} & A^3_{3'} \end{pmatrix}.$$

W relatywistycznych rachunkach zapisu macierzowego nie stosuje się (nie ma zwyczaju). Tak więc zamiast tablic liczb i kolumn liczb lub wektorów stosujemy przytoczony wyżej sposób zapisu z domyślnym sumowaniem po powtarzających się wskaźnikach. Niżej docenimy jego zalety.

Iloczynem tensorowym dwóch przestrzeni Minkowskiego, zaopatrzonych w będące swoimi kopiami bazy zupełne $\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$, nazywamy rzeczywistą przestrzeń wektorową złożoną z wszystkich możliwych 16-składnikowych kombinacji liniowych

$$\hat{a} = (\hat{e}_{\mu} \otimes \hat{e}_{\nu}) a^{\mu\nu} \quad (\text{podwójne sumowanie!})$$

zwanych tensorami drugiego rzędu (wektory są tensorami pierwszego rzędu).

Zmiana inercjalnego układu odniesienia pociąga za sobą automatycznie zmianę baz w obydwu czynnikach iloczynu tensorowego. Łatwo stąd wyprowadzić, że współrzędne $a^{\mu\nu}$ tensora \hat{a} transformują się wg przepisu

$a^{\mu\nu} = A^{\mu'}_{\mu} A^{\nu'}_{\nu} a^{\mu\nu}$ (Podwójne sumowanie. Zauważmy, że symbole μ', ν' są tu traktowane jako znaki różniące się od znaków μ, ν . W relatywistycznych rachunkach często stosuje się taki zapis.).

Tensoriem niezmienniczym względem danej grupy przekształceń liniowych (tu interesuje nas tylko grupa Lorentza) nazywamy taki tensor \hat{g} , którego współrzędne nie ulegają zmianie na skutek transformacji.¹²

Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że przytoczona na początku szczególna transformacja Lorentza nie zmienia macierzy współrzędnych tensora \hat{g} o współrzędnych

$$g^{\mu\nu} (=) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Okazuje się, że dowolna transformacja Lorentza również nie zmienia tej macierzy współrzędnych. Aby się o tym przekonać, musimy uświadomić sobie, że dowolna transformacja z rozważanej tu grupy jest złożeniem szczególnej transformacji pokazanej na wstępie i dwóch różnych obrotów trójwymiarowej części bazy w kolejności: obrót, transformacja szczególna, inny obrót. Transformacja ogólna różni się bowiem od szczególnej tym, że prędkość względna obydwu układów inercjalnych może mieć dowolny kierunek, a także dowolne może być względne (kątowe) ułożenie przestrzenne obydwu układów odniesienia. Stojąc więc przed koniecznością wykonania dowolnej transformacji Lorentza możemy najpierw obrócić trójwymiarowy układ odniesienia tak, aby oś x skierowała się w stronę zamierzonej prędkości względnej, następnie posłać ten układ w stronę jego osi x z żadaną szybkością, a na końcu obrócić ruchomy już układ tak, aby jego osie wskazały właściwe, nowe kierunki. Macierz dowolnej transformacji jest więc iloczynem trzech macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ 0 & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ 0 & \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix},$$

w których minory trzeciego stopnia α i β są ortogonalnymi macierzami wspomnianych wyżej obrotów.

Warto sprawdzić niezmienniczość współrzędnych tensora \hat{g} względem takiej transformacji.

Jak wiemy, znana ze szkoły bezwzględna wartość wektora jest niezmiennikiem dowolnych przekształceń ortogonalnych (obrotów). Stawiamy sobie następujące zadanie: spróbujemy skojarzyć z czterowektorem wielkość liczbowa, która byłaby niezmiennikiem względem dowolnej transformacji Lorentza.

Zauważmy, że macierze transformacji Lorentza nie są na ogół ortogonalne (wyjawszy szczególne transformacje Lorentza sprowadzające się do obrotów 3-przestrzeni, takie jak te dwie skrajne macierze w poprzednim wzorze). Wynika z tego, że niezmiennikiem tym zapewne nie będzie suma kwadratów

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2.$$

¹²Na przykład tensoriem niezmienniczym względem przekształceń ortogonalnych w przestrzeni trójwymiarowej jest tensor, którego macierz współrzędnych jest macierzą jednostkową. Transformacje Lorentza nie są reprezentowane macierzami ortogonalnymi (warto sprawdzić na przykładzie naszej szczególnej transformacji Lorentza) i dlatego tensor niezmienniczy będzie miał inną macierz współrzędnych.

Aby wyprowadzić poszukiwany niezmiennik zafundujemy sobie w przestrzeni Minkowskiego drugą (konkurencyjną) bazę numerowaną górnymi wskaźnikami i zdefiniowaną następująco:

$$\hat{e}^\mu \equiv g^{\mu\nu} \hat{e}_\nu \quad (\text{sumowanie po } \nu).$$

Jak łatwo stwierdzić, $\hat{e}^0 = \hat{e}_0$, $\hat{e}^k = -\hat{e}_k$ dla $k = 1, 2, 3$.

Nowa baza różni się więc od starej tylko zwrotami przestrzennych wektorów bazowych. Współrzędne czterowektorów względem nowej bazy oznaczymy symbolami x_μ i nazwiemy **współrzędnymi**

kowariantnymi (w odróżnieniu od **współrzędnych kontrawariantnych** x^μ). Dla dowolnego czterowektora mamy więc:

$$\hat{x} = \hat{e}_\mu x^\mu = \hat{e}^\mu x_\mu.$$

Korzystając z tego związku wyprowadzamy formalną relację między współrzędnymi obydwu rodzajów:

$$\hat{e}_\mu x^\mu \equiv \hat{e}^\rho x_\rho = g^{\rho\mu} \hat{e}_\mu x_\rho = \hat{e}_\mu x_\rho g^{\rho\mu}, \quad \text{czyli}$$

$$x^\mu = x_\rho g^{\rho\mu}.$$

Przedstawioną tu operację nazywamy „podnoszeniem wskaźnika”: współrzędnym x_ρ podnosimy wskaźnik posługując się współrzędnymi „górnymi” tensora \hat{g} .

Obydwie wprowadzone tu bazy są ze sobą „sztywno związane”: jedna różni się od drugiej tylko tym, że zwroty wektorów przestrzennych są przeciwne. Można więc powiedzieć, że w sensie wyboru inercjalnego układu odniesienia odpowiadają one temu samemu układowi, tylko przepis na obliczanie współrzędnych przestrzennych jest inny (przeciwne znaki). Zmiana inercjalnego układu odniesienia jest równoważna zmianie obydwu baz tak, aby relacja między nimi była zachowana. W sensie formalnym niezmienniczość tej relacji gwarantowana jest przez niezmienniczość współrzędnych tensora \hat{g} .

ZADANIE

Jak transformują się kowariantne współrzędne x_μ czterowektorów przy zmianie układu odniesienia?

Rozwiązanie:

Współrzędne ko- i kontrawariantne czterowektora spełniają relację $x^\mu = x_\rho g^{\rho\mu}$. Jak wynika z powyższej dyskusji, po zmianie bazy (obydwu baz) relacja między współrzędnymi ko- i kontrawariantnymi musi być taka sama, czyli $x^{\mu'} = x_{\rho'} g^{\rho'\mu'}$.¹³ Jeżeli więc uda się przedstawić współrzędne $x^{\mu'}$ jako sumę (coś) $_{\gamma'}$ $g^{\gamma'\mu'}$ i to „coś” będzie wyrażone jako kombinacja starych współrzędnych kowariantnych x_σ , to rozwiążemy nasze zadanie.

$$x^{\mu'} = A^{\mu'}_{\mu} x^\mu = A^{\mu'}_{\mu} x_\rho g^{\rho\mu} = A^{\mu'}_{\mu} x_\sigma g^{\rho\mu} \delta^\sigma_\rho = A^{\mu'}_{\mu} x_\sigma g^{\rho\mu} A^\sigma_{\gamma'} A^{\gamma'}_{\rho} = A^{\mu'}_{\mu} A^{\gamma'}_{\rho} g^{\rho\mu} x_\sigma A^\sigma_{\gamma'}$$

¹³ Wiemy już, że $g^{\mu'\nu'} \equiv g^{\mu\nu}$.

$$= g^{\gamma\mu} x_\sigma A^\sigma_{\gamma'} = x_{\gamma'} g^{\gamma\mu}.$$

Tak więc współrzędne kowariantne czterowektorów transformują się wg wzoru:

$$x_{\gamma'} = x_\sigma A^\sigma_{\gamma'}.$$

Wynika z tego, że nowe czterowektory bazowe $\hat{e}^{\gamma'}$ wyrażają się przez stare \hat{e}^{ν} zależnością

$$\hat{e}^{\gamma'} = A^{\gamma'}_{\nu} \hat{e}^{\nu},$$

bo tylko wtedy $\hat{x} \equiv \hat{e}^{\mu} x_{\mu}$.

Tensorowi \hat{g} odpowiadają w bazie $\hat{e}^{\mu} \otimes \hat{e}^{\nu}$ współrzędne $g_{\mu\nu}$. Łatwo pokazać, że macierz współrzędnych $g_{\mu\nu}$ jest identyczna z macierzą $g^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \hat{g} &= (\hat{e}_{\mu} \otimes \hat{e}_{\nu}) g^{\mu\nu} = (\hat{e}_0 \otimes \hat{e}_0) - (\hat{e}_1 \otimes \hat{e}_1) - (\hat{e}_2 \otimes \hat{e}_2) - (\hat{e}_3 \otimes \hat{e}_3) \\ &= (\hat{e}^0 \otimes \hat{e}^0) - (\hat{e}^1 \otimes \hat{e}^1) - (\hat{e}^2 \otimes \hat{e}^2) - (\hat{e}^3 \otimes \hat{e}^3) = (\hat{e}^{\mu} \otimes \hat{e}^{\nu}) g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Kowariantne współrzędne $g_{\mu\nu}$ tensora \hat{g} pozwalają na sformułowanie operacji „obniżania wskaźnika”. Wychodzimy od związku $x^{\mu} = x_{\rho} g^{\rho\mu}$ i staramy się go rozwickłać względem x_{ρ} . Mnożymy obustronnie (z sumowaniem) przez $g_{\mu\sigma}$:

$$x^{\mu} g_{\mu\sigma} = x_{\rho} g^{\rho\mu} g_{\mu\sigma} = x_{\rho} \delta^{\rho}_{\sigma} = x_{\sigma}.$$

Do „obniżania wskaźnika” służą więc współrzędne $g_{\mu\sigma}$:

$$x_{\sigma} = x^{\mu} g_{\mu\sigma}.$$

Warto zauważyć, że technika podnoszenia i obniżania wskaźnika jest wygodna. Powtórzmy na przykład wyprowadzenie wzoru transformacyjnego dla współrzędnych kowariantnych. Zaczynamy od $x^{\mu'} = A^{\mu'}_{\mu} x^{\mu}$ i obniżamy wskaźniki mnożąc obustronnie przez $g_{\mu'\sigma'}$:

$$x_{\sigma'} = x^{\mu'} g_{\mu'\sigma'} = g_{\mu'\sigma'} A^{\mu'}_{\mu} \delta^{\mu}_{\rho} x^{\rho} = g_{\mu'\sigma'} A^{\mu'}_{\mu} g^{\mu\lambda} g_{\lambda\rho} x^{\rho} = A^{\mu'}_{\mu} g_{\mu'\sigma'} g^{\mu\lambda} x_{\lambda} = A_{\sigma'}^{\lambda} x_{\lambda}.$$

Oczekiwaliśmy wyniku $x_{\sigma'} = x_{\lambda} A^{\lambda}_{\sigma'}$. W tym miejscu ujawniają się zalety zapisu i rachunku „na wskaźnikach” zamiast z użyciem tablicowego zapisu macierzy. Wzór $x_{\sigma'} = A_{\sigma'}^{\lambda} x_{\lambda}$ zapisany macierzowo przyjmuje bowiem postać

$$\begin{pmatrix} x_{0'} \\ x_{1'} \\ x_{2'} \\ x_{3'} \end{pmatrix} = (A^{-1})^T \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

podczas gdy wzór $x_{\sigma'} = x_{\lambda} A^{\lambda}_{\sigma'}$ jest „wskaźnikowym” zapisem relacji macierzowej

$$(x_{0'}, x_{1'}, x_{2'}, x_{3'}) = (x_0, x_1, x_2, x_3) (A^{-1}),$$

czyli jest w pełni równoważny poprzedniemu.

ZADANIE

Udowodnij, że $A^{\mu}_{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}}$ (ustalone trzy nowe współrzędne, oprócz $x^{0'}$) a także, że $A^{\mu}_{\nu'} = \frac{\delta x_{\nu'}}{\delta x^{\mu}}$ (ustalone trzy z czterech starych współrzędnych).

Wyprowadzone wyżej reguły transformowania się współrzędnych kowariantnych i kontrawariantnych można łatwo uogólnić na współrzędne tensorów dowolnego rzędu. Na przykład składowe $t^{\alpha\beta\gamma}$ tensora trzeciego rzędu \hat{t} przy zmianie inercjalnego układu odniesienia podlegają transformacji:

$$t^{\alpha'\beta'\gamma'} = A^{\alpha'}_{\alpha} A^{\beta'}_{\beta} A^{\gamma'}_{\gamma} t^{\alpha\beta\gamma},$$

podczas gdy składowe $t^{\alpha}_{\beta\gamma}$ tego samego tensora podlegają transformacji

$$t^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = A^{\alpha'}_{\alpha} A^{\beta}_{\beta'} A^{\gamma}_{\gamma'} t^{\alpha}_{\beta\gamma}$$

(warto zastanowić się, do jakiej bazy w przestrzeni $M \otimes M \otimes M$ odnoszą się współrzędne $t^{\alpha\beta\gamma}$, a do jakiej współrzędne $t^{\alpha}_{\beta\gamma}$).

ZADANIE

Należy udowodnić, że dla dowolnych dwóch czterowektorów \hat{a} i \hat{b} oraz dowolnego tensora \hat{t} o współrzędnych kowariantnych $t_{\alpha\beta}$ wyrażenie $a^{\mu} b^{\nu} t_{\mu\nu} \equiv a_{\mu} b_{\nu} t^{\mu\nu} \equiv a^{\mu} b_{\nu} t^{\mu}_{\nu}$ itd. jest niezmiennikiem dowolnej transformacji Lorentza, czyli jest liczbą, której wartość nie zmienia się przy zmianie układu inercjalnego.

Rozwiązanie:

$$a^{\mu} b^{\nu} t_{\mu\nu} = A^{\mu'}_{\mu} A^{\nu'}_{\nu} A_{\mu'}^{\sigma} A_{\nu'}^{\rho} a^{\mu} b^{\nu} t_{\sigma\rho} = A_{\mu'}^{\sigma} A^{\mu'}_{\mu} A_{\nu'}^{\rho} A^{\nu}_{\rho} a^{\mu} b^{\nu} t_{\sigma\rho} = \delta^{\sigma}_{\mu} \delta^{\rho}_{\nu} a^{\mu} b^{\nu} t_{\sigma\rho} = a^{\mu} b^{\nu} t_{\mu\nu}$$

c.b.d.o.

Powyższe rozważania łatwo jest uogólnić. Wynika z nich na przykład, że wyrażenie $a^{\alpha} b^{\beta} t_{\alpha\beta\gamma}$ (dla $\gamma = 0,1,2,3$) jest kompletem czterech współrzędnych kowariantnych pewnego czterowektora, itd.

Rozważmy liczbę będącą niezmiennikiem transformacji Lorentza, zbudowaną z dwóch wektorów i tensora niezmienniczego:

$$a^\alpha b^\beta g_{\alpha\beta} = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a^\alpha b^\beta g_{\alpha'\beta'} = a^{0'} b^{0'} - a^{1'} b^{1'} - a^{2'} b^{2'} - a^{3'} b^{3'}.$$

Dzięki niezmienniczości współrzędnych tensora \hat{g} , kształt zależności tej liczby od nowych i starych współrzędnych obydwu wektorów jest taki sam. Podobną liczbę (niezmiennik) możemy zbudować z dwóch wektorów \hat{a} :

$$a^\alpha a^\beta g_{\alpha\beta} = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2 = (a^{0'})^2 - (a^{1'})^2 - (a^{2'})^2 - (a^{3'})^2.$$

Widzimy więc, że niezmienniczą względem transformacji Lorentza „wartością bezwzględną czterowektora” jest wyrażenie $(a^0)^2 - |\vec{a}|^2$. Takimi właśnie wyrażeniami są interwał czasoprzestrzenny

$$\Delta s^2 = (\Delta x^0)^2 - |\Delta \vec{x}|^2$$

i kwadrat masy spoczynkowej obiektu

$$m_0^2 = (p^0)^2 - |\vec{p}|^2.$$

ZADANIE

Niech liczbowa funkcja $f(x)$ będzie niezmiennikiem względem transformacji Lorentza (gdzie x oznacza położenie w przestrzeni Minkowskiego). Udowodnij, że $\frac{\partial f}{\partial x^\mu}$ ($\mu = 0,1,2,3$) stanowi komplet czterech składowych kowariantnych (kowariantnych!) pewnego czterowektora.

Spróbuj określić charakter wyrażen: $\frac{\partial \Phi^\mu(x)}{\partial x_\nu}$ (różniczkowana jest czterowektorowa funkcja czteropolożenia x), $\frac{\partial \Phi^\mu(x)}{\partial x^\mu}$ (tu – suma po μ) i innych podobnych.

UWAGA!

Przedstawiliśmy **bierną interpretację** transformacji Lorentza, czyli skutki zmiany układu inercjalnego. Ta interpretacja zakłada, że jedynymi obiektami, które zmieniają się w tym przypadku, są czterowektory bazowe, w wyniku czego zmieniają się współrzędne wszystkich obiektów (oprócz wartości niezmienników – skalarów, które się nie zmieniają).

Transformacje Lorentza można jednak również zinterpretować **czynnie**. W ramach tego podejścia nie zmieniamy układu odniesienia, tylko zmieniamy współrzędne obiektów (czyli zmieniamy obiekty). Na przykład czterowektor \hat{x} przed transformacją, który ma względem bazy $\{\hat{e}_\mu\}$ składowe x^μ , przechodzi w wyniku transformacji czynnej w nowy czterowektor $\tilde{L}\hat{x}$ (\tilde{L} jest odpowiednim operatorem działającym w przestrzeni czterowektorów!) o składowych $x^{\mu'} = A^{\mu'}_\nu x^\nu$. Oczywiście macierz A jest reprezentacją operatora \tilde{L} .

Zapis transformacji czynnej stwarza pewną estetyczną niedogodność polegającą na tym, że współrzędne $x^{\mu'}$ nowego czterowektora $\tilde{L}\hat{x}$ odnoszą się do tej samej bazy, co współrzędne x^μ nieprzekształconego czterowektora \hat{x} . Tak więc zapisując transformację czynną musimy przyjąć, że $\hat{e}_\mu \equiv \hat{e}_{\mu'}$ dla $\mu = \mu'$.

Dodatek 2

SKŁADANIE MOMENTÓW PĘDU

Rozważmy dwie przestrzenie Hilberta A i B oraz działające w nich operatory momentu pędu $\hat{J}_{1,x,y,z}$ i $\hat{J}_{2,x,y,z}$, których składowe powinny spełniać znane reguły komutacji.

Tworzymy przestrzeń $A \otimes B$ i w niej definiujemy operatory $\hat{J} = \hat{J}_1 + \hat{J}_2$, czyli operatory $\hat{J}_x = \hat{J}_{1x} + \hat{J}_{2x}$, $\hat{J}_y = \hat{J}_{1y} + \hat{J}_{2y}$, $\hat{J}_z = \hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}$. Łatwo pokazać, że operatory \hat{J} są operatorami momentu pędu.

TWIERDZENIE:

Operatory \hat{J}_1^2 , \hat{J}_2^2 , \hat{J}_{1z} i \hat{J}_{2z} komutują każdy z każdym. Dowód jest trywialny.

Z twierdzenia wynika, że w przestrzeni $A \otimes B$ musi istnieć komplet wspólnych wektorów własnych tych czterech operatorów. Są to oczywiście stany $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \equiv | \rangle$. Mamy bowiem

$$\hat{J}_1^2 | \rangle = j_1(j_1 + 1) | \rangle,$$

$$\hat{J}_2^2 | \rangle = j_2(j_2 + 1) | \rangle,$$

$$\hat{J}_{1z} | \rangle = m_1 | \rangle,$$

$$\hat{J}_{2z} | \rangle = m_2 | \rangle.$$

Jak wiemy, operatory \hat{J}_1^2 i \hat{J}_{1z} są zdegenerowane: każdej wartości własnej j_1 odpowiada $(2j_1 + 1)$ wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni A , w której wszystkie wektory są wektorami własnymi \hat{J}_1^2 do tej samej wartości własnej $j_1(j_1 + 1)$. Dopiero dołączenie komutującego z \hat{J}_1^2 operatora \hat{J}_{1z} usuwa degenerację: we wspomnianej podprzestrzeni operator \hat{J}_{1z} wybiera jednoznacznie $(2j_1 + 1)$ swoich wektorów własnych do wartości własnych $m_1 = -j_1, \dots, j_1$. Podobnie jest z parą operatorów \hat{J}_2^2 i \hat{J}_{2z} w przestrzeni B .

ZADANIE

Czy operator \hat{J}_{1z} jest zdegenerowany w przestrzeni A ? Jeżeli tak, to co usuwa tę degenerację?

Ustalamy wartości własne operatorów \hat{J}_1^2 i \hat{J}_2^2 : $j_1(j_1 + 1)$, $j_2(j_2 + 1)$. Tym samym w A wybraliśmy $(2j_1 + 1)$ wymiarową podprzestrzeń, a w B $(2j_2 + 1)$ wymiarową podprzestrzeń. W przestrzeni $A \otimes B$ wybraliśmy więc $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ wymiarową podprzestrzeń. Wszystkie wektory tej podprzestrzeni są wspólnymi wektorami własnymi operatorów \hat{J}_1^2 i \hat{J}_2^2 do wartości własnych odpowiednio $j_1(j_1 + 1)$ oraz $j_2(j_2 + 1)$. Omawiana podprzestrzeń może być oczywiście napięta na wspomnianych wyżej wektorach $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ dla

$$m_1 = -j_1, \dots, j_1,$$

$$m_2 = -j_2, \dots, j_2,$$

będących wspólnymi wektorami własnymi operatorów \hat{J}_1^2 , \hat{J}_2^2 , \hat{J}_{1z} i \hat{J}_{2z} . Komplet tych wektorów nazwiemy starą bazą.

TWIERDZENIE:

Następująca czwórka operatorów komutuje (każdy z każdym): $\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2, \hat{J}^2, \hat{J}_z$, gdzie $\hat{J} = \hat{J}_1 + \hat{J}_2$ (na przykład $\hat{J}_z = \hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}$) jest operatorem momentu pędu, czyli jego składowe spełniają odpowiednie reguły komutacji. Dowód jest trywialny.

TWIERDZENIE:

Operatory \hat{J}^2 i \hat{J}_z działają wewnątrz $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ wymiarowej przestrzeni napiętej na stanach $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$.

Dla operatora \hat{J}_z dowód jest trywialny, bo wszystkie wektory w tej przestrzeni są jego wektorami własnymi.

Dla operatora \hat{J}^2 sprawa się wyjaśnia po jego przedstawieniu w postaci $\hat{J}^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + 2\hat{J}_{1z}\hat{J}_{2z} + (\hat{J}_{1+}\hat{J}_{2-} + \hat{J}_{1-}\hat{J}_{2+})$. Definicję i własności operatorów \hat{J}_+ i \hat{J}_- można znaleźć we wstawce, kilkadziesiąt wierszy dalej.

Z powyższych dwóch twierdzeń wynika, że w wybranej wcześniej przestrzeni degeneracji operatorów \hat{J}_1^2 i \hat{J}_2^2 musi istnieć komplet $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ wspólnych stanów własnych operatorów $\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2, \hat{J}^2, \hat{J}_z$. Ten komplet wektorów nazwiemy nową bazą.

W wybranej przestrzeni degeneracji mamy już jedną bazę złożoną z wektorów $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$. Baza ta przypisana jest operatorom $\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2, \hat{J}_{1z}$ i \hat{J}_{2z} . Teraz wybraliśmy inną czwórkę operatorów $\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2, \hat{J}^2, \hat{J}_z$, które wybiorą inną bazę w omawianej podprzestrzeni (a dokładniej: operatory \hat{J}^2 i \hat{J}_z w inny sposób usuną degenerację pozostawioną przez operatory \hat{J}_1^2 i \hat{J}_2^2 po ustaleniu ich dwóch wartości własnych, niż uczyniły to operatory \hat{J}_{1z} i \hat{J}_{2z}).

Wstawka (dotyczy dowolnego operatora momentu pędu)

**OPERATORY PODNOSZENIA I OPUSZCZANIA
RZUTU MOMENTU PĘDU:**

$$\hat{J}_+ \equiv \hat{J}_x + i\hat{J}_y \quad \text{oraz} \quad \hat{J}_- \equiv \hat{J}_x - i\hat{J}_y.$$



Operatory, które zdefiniowane są w tytule, pełnią rolę pomocniczą w dowodzeniu twierdzeń.



Korzystając z reguł komutacyjnych dla składowych momentu pędu można pokazać, że

$$\hat{J}^2(\hat{J}_+|j, m\rangle) = j(j+1)\hat{J}_+|j, m\rangle,$$

$$\hat{J}_z(\hat{J}_+|j, m\rangle) = (m+1)\hat{J}_+|j, m\rangle,$$

$$\hat{J}^2(\hat{J}_-|j, m\rangle) = j(j+1)\hat{J}_-|j, m\rangle,$$

$$\hat{J}_z(\hat{J}_-|j, m\rangle) = (m-1)\hat{J}_-|j, m\rangle.$$

Operatory \hat{J}_+ i \hat{J}_- zmieniają normę stanu $|j, m\rangle$. Sprawdźmy to dla \hat{J}_- :

$$\begin{aligned} (\hat{J}_-|j, m\rangle)^2 &= \langle j, m | (\hat{J}_-)^+ \hat{J}_- | j, m \rangle = \langle j, m | \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 + \hat{J}_z | j, m \rangle \\ &= \langle j, m | j(j+1) - m^2 + m | j, m \rangle = j(j+1) - m(m-1), \end{aligned}$$

bo $|j, m\rangle$ jest unormowany. Tak więc możemy napisać

$$\frac{1}{\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}} \hat{J}_- | j, m \rangle = | j, m-1 \rangle. \quad \leftarrow \text{ unormowany}$$

Podobnie można pokazać, że

$$\hat{J}_+ | j, m \rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} | j, m+1 \rangle.$$

Z wyprowadzonych wzorów wynika w szczególności, że

$$\hat{J}_+ | j, j \rangle = \hat{J}_- | j, -j \rangle = 0,$$

czyli że operatory \hat{J}_- i \hat{J}_+ działają wewnątrz podprzestrzeni napiętej na wektorach $|j, m\rangle$ dla $m = -j, \dots, j$.

Szukamy wspólnych stanów własnych operatorów \hat{J}_1^2 , \hat{J}_2^2 , \hat{J}^2 , \hat{J}_z zawartych w przestrzeni degeneracji operatorów \hat{J}_1^2 i \hat{J}_2^2 do wybranych wartości własnych $j_1(j_1+1)$ i $j_2(j_2+1)$. Pierwszy z tych stanów odgadniemy: będzie nim jeden ze stanów starej bazy: $|j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle$, który okazuje się również jednym ze stanów nowej bazy. Sprawdźmy to.

$$\text{Oczywiście } \hat{J}_z | j_1, j_1 \rangle \otimes | j_2, j_2 \rangle = (j_1 + j_2) | j_1, j_1 \rangle \otimes | j_2, j_2 \rangle.$$

Z operatorem \hat{J}^2 jest trudniej:

$$\begin{aligned} \hat{J}^2 | j_1, j_1 \rangle \otimes | j_2, j_2 \rangle &= (\hat{J}_1 + \hat{J}_2)^2 | j_1, j_1 \rangle \otimes | j_2, j_2 \rangle \\ &= [\hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + 2\hat{J}_{1z}\hat{J}_{2z} + (\hat{J}_{1+}\hat{J}_{2-} + \hat{J}_{1-}\hat{J}_{2+})] | j_1, j_1 \rangle \otimes | j_2, j_2 \rangle \\ &= [j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1) + 2j_1j_2 + 0] | j_1, j_1 \rangle \otimes | j_2, j_2 \rangle \\ &= (j_1 + j_2)(j_1 + j_2 + 1) | j_1, j_1 \rangle \otimes | j_2, j_2 \rangle. \end{aligned}$$

Sprawdziliśmy więc, że stan $|j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle$ jest wspólnym stanem własnym operatorów $\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2, \hat{J}^2, \hat{J}_z$ do wartości własnych odpowiednio $j_1(j_1+1), j_2(j_2+1), (j_1+j_2)(j_1+j_2+1), j_1+j_2$. Stany te zapisujemy zwykle $|j_1, j_2, j, m\rangle$ albo w skrócie $|j, m\rangle$. W naszym przypadku $j = j_1 + j_2, m = j_1 + j_2$.

Operatory \hat{J}_+ i \hat{J}_- działają wewnątrz rozważanej podprzestrzeni napiętej na wspólnych stanach własnych operatorów $\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2, \hat{J}^2$ i \hat{J}_z (nie wyprowadzają poza tę przestrzeń), co łatwo sprawdzić (por. Wstawka na str. 80). Działając operatorem \hat{J}_- na stan $|j_1, j_2, j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle$, dostaniemy więc serię $2(j_1 + j_2) + 1$ stanów (łącznie z tym pierwszym):

$$\begin{aligned} & |j_1, j_2, j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle, \\ & |j_1, j_2, j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle, \\ & \vdots \\ & |j_1, j_2, j_1 + j_2, -(j_1 + j_2)\rangle \end{aligned}$$

w postaci kombinacji liniowych stanów starej bazy $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$.

Obliczymy te stany dla $j_1 = 1, j_2 = \frac{1}{2}$.

$$|j, m\rangle = \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = |1, 1\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle.$$

Działamy operatorem \hat{J}_-

$$\sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{2-0} |1, 0\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} |1, 1\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle,$$

czyli

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 0\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |1, 1\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle.$$

Działając jeszcze dwukrotnie operatorem \hat{J}_- , otrzymamy kolejne dwa stany

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} |1, -1\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 0\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \\ \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle &= |1, -1\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle. \end{aligned}$$

Wyliczyliśmy $2(j_1 + j_2) + 1$ stanów nowej bazy. Jest ich za mało, bo $2(j_1 + j_2) + 1$ jest mniejsze od $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$, czyli od liczby wymiarów podprzestrzeni, w której pracujemy. Szukamy reszty stanów.

Popatrzmy na naszą podprzestrzeń z punktu widzenia operatora \hat{J}_z . Wszystkie wektory starej bazy są przypadkowo wektorami własnymi operatora \hat{J}_z :

$$\hat{J}_z |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle = (m_1 + m_2) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle.$$

Widać stąd, że najwyższa możliwa wartość własna operatora \hat{J}_z w omawianej podprzestrzeni jest $(j_1 + j_2)$ i może być zrealizowana tylko na jeden sposób: $|j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle$.

Rozważmy teraz wartość własną $j_1 + j_2 - 1$ operatora \hat{J}_z . Widać od razu dwa stany starej bazy:

$$|j_1, j_1 - 1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle, \quad |j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2 - 1\rangle$$

(oraz wszystkie ich kombinacje liniowe) będące wektorami własnymi operatora \hat{J}_z do tej wartości własnej. W omawianej podprzestrzeni mamy więc dwuwymiarową podprzestrzeń degeneracji operatora \hat{J}_z do wartości własnej $j_1 + j_2 - 1$.

Pokażemy, że operator \hat{J}^2 jest w tej podprzestrzeni wewnętrzny. Wcześniej już pokazaliśmy, że

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + 2\hat{J}_{1z}\hat{J}_{2z} + (\hat{J}_{1+}\hat{J}_{2-} + \hat{J}_{1-}\hat{J}_{2+}).$$

Widać teraz, że dowolna kombinacja wektorów $|j_1, j_1 - 1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle$ i $|j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2 - 1\rangle$ pod działaniem operatora \hat{J}^2 przechodzi w inną kombinację tych samych dwóch wektorów.

Wynika stąd, że operator \hat{J}^2 musi mieć w omawianej dwuwymiarowej podprzestrzeni kompletną bazę złożoną z dwóch swoich wektorów własnych. Jeden z tych wektorów potrafimy już wyliczyć:

$$|j_1, j_2, j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle = \alpha |j_1, j_1 - 1\rangle |j_2, j_2\rangle + \beta |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2 - 1\rangle,$$

gdzie α i β to odpowiednie współczynniki Clebscha—Gordana.

Łatwo znaleźć wektor prostopadły do niego, należący do tej samej dwuwymiarowej podprzestrzeni. Będzie to oczywiście wektor

$$|\ \rangle = -\beta |j_1, j_1 - 1\rangle |j_2, j_2\rangle + \alpha |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2 - 1\rangle.$$

Z tego, że w tej dwuwymiarowej podprzestrzeni muszą istnieć dwa prostopadłe wspólne wektory własne operatorów \hat{J}^2 i \hat{J}_z , wynika, że powyższy wektor musi być wektorem własnym operatora \hat{J}^2 do jakiejś wartości własnej. Z własności widm operatorów momentu pędu wynika, że musi to być wartość własna odpowiadająca parametrowi j równemu $j_1 + j_2 - 1$ lub większemu. Okazuje się, że będzie to $j = j_1 + j_2 - 1$, co sprawdzimy, działając operatorem \hat{J}_+ na wektor $|\ \rangle$. Otrzymamy wektor zerowy, co rozstrzyga sprawę.

Obliczmy na początek współczynniki C—G α i β . Działając operatorem \hat{J}_- na stan $|j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle$, znajdujemy: $\alpha = \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}}$, $\beta = \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}}$, i teraz

$$\begin{aligned} & \hat{J}_+ [-\beta |j_1, j_1 - 1\rangle |j_2, j_2\rangle + \alpha |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2 - 1\rangle] \\ &= -\sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} \sqrt{j_1(j_1 + 1) - j_1(j_1 - 1)} |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2\rangle \\ &+ \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} \sqrt{j_2(j_2 + 1) - j_2(j_2 - 1)} |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2\rangle \\ &= |\text{stan zerowy}\rangle, \text{ co można łatwo pokazać.} \end{aligned}$$

Dostaliśmy wektor zerowy, co oznacza, że

$$| \rangle = |j_1, j_2, j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle.$$

Na wektor $| \rangle$ działamy znów wielokrotnie operatorem \hat{J}_- , otrzymując "drugą kolumnę stanów" nowej bazy:

$$\begin{aligned} & |j_1, j_2, j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle, \\ & |j_1, j_2, j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 2\rangle, \\ & \vdots \\ & |j_1, j_2, j_1 + j_2 - 1, -(j_1 + j_2 - 1)\rangle. \end{aligned}$$

Kolejne kolumny stanów dla coraz to mniejszych wartości parametru j budujemy podobnie. Na przykład rozpoczynając następną, trzecią kolumnę stanów, będziemy w trójwymiarowej podprzestrzeni napiętej na wektorach

$$|j_1, j_1 - 2\rangle |j_2, j_2\rangle, \quad |j_1, j_1 - 1\rangle |j_2, j_2 - 1\rangle, \quad |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2 - 2\rangle$$

szukali trzeciego wspólnego wektora własnego operatorów \hat{J}^2 oraz \hat{J}_z do wartości własnych odpowiednio: "nieznanej" i $m = j_1 + j_2 - 2$. Nieznany parametr j okaże się równy $j_1 + j_2 - 2$, o czym przekonamy się, działając operatorem \hat{J}_+ na taką kombinację liniową trzech wymienionych wyżej wektorów, aby była ona prostopadła do ustanowionych wcześniej dwóch kombinacji liniowych: stanu trzeciego od góry w pierwszej kolumnie stanów nowej bazy: $|j, m\rangle = |j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 2\rangle$ i drugiego od góry w drugiej kolumnie: $|j, m\rangle = |j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 2\rangle$.

Symbole stanów, których szukamy, ustawia się często w tabelę o kształcie trapezu, wypisując obok siebie kolejne kolumny stanów według schematu:

$$\begin{array}{cccc} |j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle & & & \\ |j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle & |j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle & & \\ |j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 2\rangle & |j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 2\rangle & |j_1 + j_2 - 2, j_1 + j_2 - 2\rangle & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & |j_1 + j_2 - 2, -(j_1 + j_2 - 2)\rangle & \\ \cdot & |j_1 + j_2 - 1, -(j_1 + j_2 - 1)\rangle & & \\ |j_1 + j_2, -(j_1 + j_2)\rangle & & & \end{array}$$

Podkreślono stan, którego poszukiwanie jest dyskutowane w tekście poprzedzającym tabelę.

Wypełnianie powyższej tabeli kończymy po zamknięciu kolumny, dla której $j = |j_1 - j_2|$, bo wtedy akurat zgadza się liczba wymiarów (niech $j_1 > j_2$):

$$\sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2j+1) = (2j_1+1)(2j_2+1).$$

Przy obliczaniu współczynników C—G stosujemy dwie konwencje, tzw. konwencje Condon—Shortleya, które pozwoliły na stabilizowanie tych współczynników:

1. Biorąc pierwiastki we wzorach na zmianę normalizacji wektorów pod działaniem operatorów \hat{J}_- i \hat{J}_+ wybieramy zawsze znak plus (wyrażenia pierwiastkowane są tu zawsze dodatnie).

2. Rozpoczynając nową (powiedzmy — $k+1$ -szą) kolumnę stanów, czyli budując wektor $|j, m\rangle = |j_1 + j_2 - k, j_1 + j_2 - k\rangle$, bierzemy go z takim znakiem, aby

$$\langle j_1, j_2, j_1 + j_2 - (k + 1), j_1 + j_2 - k | \hat{J}_{1z} | j_1, j_2, j_1 + j_2 - k, j_1 + j_2 - k \rangle > 0.$$

Wróćmy teraz do przykładu, gdzie składaliśmy momenty pędu $j = 1$ i $j = \frac{1}{2}$. Wyliczyliśmy współczynniki C—G dla pierwszej kolumny stanów. Szukamy teraz stanu $|j, m\rangle = |j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, czyli

$$|j_1, j_2, j, m\rangle = |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} |1, 0\rangle_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \mp \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 1\rangle_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}.$$

Znaki dobieramy z drugiej konwencji C—S:

$$\left[\sqrt{\frac{2}{3}} \langle 1, 0 | \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | + \sqrt{\frac{1}{3}} \langle 1, 1 | \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \right] \hat{J}_{1z} \left[\pm \sqrt{\frac{1}{3}} |1, 0\rangle_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \mp \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 1\rangle_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \right] = \mp \frac{\sqrt{2}}{3},$$

czyli trzeba wziąć dolne znaki:

$$|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = -\sqrt{\frac{1}{3}} |1, 0\rangle_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 1\rangle_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}.$$

Działamy operatorem \hat{J}_- , otrzymując

$$|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}} |1, -1\rangle_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} |1, 0\rangle_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}.$$

Łatwo sprawdzić, że na tym koniec, ponieważ:

$$(2j_1 + 1)(2j_2 + 1) = (2 \cdot 1 + 1) \left(2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \right) = 6.$$

Sześć znalezionych wektorów nowej bazy można ułożyć w tabelę o kształcie trapezu

$$\begin{array}{l} |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle \quad |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \quad |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle \end{array}$$

Kolumny tej tabeli odpowiadają degeneracji w j -ach, a wiersze — w m -ach.

Same współczynniki C—G zapisuje się w tabelach o tradycyjnym układzie rubryk:

$j_1 \times j_2$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	j
$1 \times \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	m
$1 \quad \frac{1}{2}$	1						
$1 \quad -\frac{1}{2}$		$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$				
$0 \quad \frac{1}{2}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$				
$0 \quad -\frac{1}{2}$				$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$		
$-1 \quad \frac{1}{2}$				$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		
$-1 \quad -\frac{1}{2}$						1	
$m_1 \quad m_2$							

W niektórych wydawnictwach opuszczane są pierwiastki, a więc zamiast (przykładowo) $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ przeczytamy $\left(-\frac{2}{3}\right)$.

L i t e r a t u r a

1. Schiff L. I.: *Mechanika kwantowa*, PWN, Warszawa 1977.
2. Dawydow A. S.: *Mechanika kwantowa*, PWN, Warszawa 1967.
3. Średniawa B.: *Mechanika kwantowa*, PWN, Warszawa 1988.
4. Łopuszański J.: *Rachunek spinorów*, PWN, Warszawa 1985.
5. Rumer J.B., Fet A.I.: *Teoria grup i pola skwantowane*, Moskwa 1977 (po rosyjsku).
6. W. B. Bierestecki, E. M. Lifszyc, L. P. Pitajewski : *Relatywistyczna teoria kwantów*, część 1, PWN, 1972.
7. Schweber S.S.: *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*, New York 1961.
8. Fermi E.: *Netes on Quantum Mechanics*, Chicago 1961.