

## Podstawy mechaniki teoretycznej

### WSTĘP

W tradycyjnym wykładzie fizyki uniwersyteckiej mechanika klasyczna jest dla studentów pierwszą okazją do zakosztowania czystej fizyki teoretycznej.

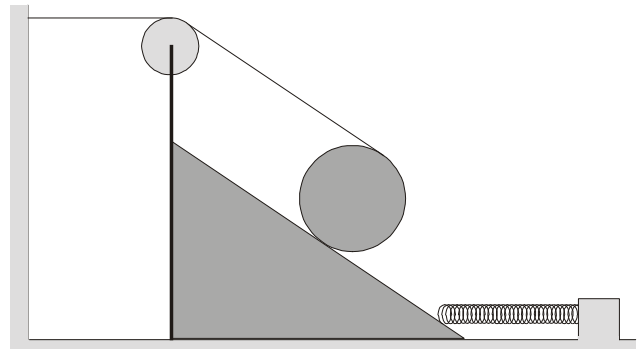
Prawa fizyki rządzące zjawiskami mechanicznymi są określone w zupełności przez zasady dynamiki Newtona i poznajemy je już w gimnazjum. Po przyjęciu tych praw do wiadomości, konstruujemy mechanikę teoretyczną, nie odwołując się już do żadnych doświadczeń, w tym sensie, że nie zadajemy Przyrodzie żadnych nowych pytań eksperymentalnych.

Można więc spytać: w jakim celu budujemy cały formalizm, którego prezentacji poświęcone będzie to opracowanie? Odpowiedź jest w zasadzie banalna: czynimy tak dla wygody. Po prostu okazuje się, że prawa mechaniki klasycznej, ujęte (w sposób całkowicie wyczerpujący!) w postaci trzech „szkolnych” zasad dynamiki, są w większości przypadków niewygodne w użyciu.

Jako przykład rozważmy układ przedstawiony na rysunku. Równia może swobodnie (bez tarcia) sunąć po stole w płaszczyźnie rysunku, a walec, na który nawinięta jest nić, toczy się po równi bez oporów i bez poślizgu. Gdy walec toczy się w dół, nawija na siebie nić, równia przesuwa się w lewo, a sprężyna jest naciągana. Doświadczenie, płynące z obcowania z przedmiotami, pozwala nam zaledwie wyobrazić sobie, że opisany układ będzie wykonywał okresowe wahania. Jesteśmy co prawda całkowicie świadomi tego, że ruch układu będzie można jednoznacznie przewidzieć na podstawie szkolnych zasad dynamiki Newtona, niemniej praktyczna realizacja takiego zadania wydaje się na pierwszy rzut oka zadaniem trudnym, nawet wtedy, gdy dobrze rozumiemy te zasady. Aparat rachunkowy mechaniki teoretycznej, który tu zreferujemy, pozwala jednak — jak się przekonamy — sprowadzić to przykładowe zadanie do banalnego problemu jednowymiarowego oscylatora harmonicznego, który już potrafi rozwiązać średnio uzdolniony maturzysta.

Prowadząc przez wiele lat ćwiczenia z mechaniki klasycznej zdobyłem pewne doświadczenie pozwalające mi wskazać zagadnienia, których zrozumienie sprawia studentom szczególną trudność, a także dostrzec pewne rutynowe metodyczne usterki, powtarzające się w niektórych podręcznikach mechaniki. Doświadczeniem tym kierowałem się pisząc to opracowanie, w którym starałem się w sposób możliwie przystępny zaprezentować sam trzon mechaniki klasycznej.

Zakładam, że Czytelnik posiada wiedzę w zakresie tradycyjnego, szkolnego wykładu mechaniki Newtona.



## I. ZASADY DYNAMIKI NEWTONA

Niniejsze opracowanie przeznaczone jest dla studentów, którym trzy zasady dynamiki, w ich klasycznym sformułowaniu, są znane. Niemniej zachęcam do przeczytania tego rozdziału.

Przypomnimy sobie pojęcie układu odniesienia. Do naszych celów najzupełniej wystarczy tradycyjne, wyniesione ze szkoły wyobrażenie układu odniesienia jako trzech prostych, dostatecznie cienkich listew z naniesioną podziałką liczbową, połączonych w jednym punkcie pod kątem prostym. Obiekty takie pozwalają w znany sposób na odczytywanie współrzędnych wektorów wodzących śledzących obiekty punktowe. Rzut oka na otaczający nas świat przekonuje nas, że można wybrać nieskończenie wiele różnych układów odniesienia, z których każdy pozwoli na przypisanie pobliskich nam obiektom punktowym odpowiednich wektorów wodzących<sup>1</sup>.

Na razie wszystkie możliwe do wyobrażenia układy odniesienia wydają się być równoważne, ale na pierwszy rzut oka widać, że opis  $d$  a n e g o obiektu fizycznego będzie zależał od układu odniesienia, z którego jest prowadzony. Jak dotąd rozważyliśmy tylko jeden atrybut obiektu punkowego: wektor wodzący jego położenia. Oznaczmy go symbolem  $\vec{r}$ . Wektor wodzący danego obiektu punkowego zależy oczywiście od wyboru układu odniesienia, z którego obiekt obserwujemy. Prosty szkic pozwala zorientować się, że między wektorami wodzącymi  $\vec{r}$  i  $\vec{r}'$  obiektu punkowego  $P$ , poprowadzonymi — odpowiednio — z dwóch różnych układów odniesienia  $\Sigma$  i  $\Sigma'$ , oraz wektorem wodzącym  $\vec{R}$  początku układu  $\Sigma'$ , opisanego z układu  $\Sigma$ , zachodzi związek

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'.$$

Związek ten pozostaje w oderwaniu od kierunków osi układów odniesienia: na razie zaangażowaliśmy tylko początki tych układów.

Różniczkując ten związek obustronnie względem czasu otrzymujemy relację między wektorami prędkości obiektu  $P$  względem obydwu układów odniesienia

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}',$$

gdzie  $\vec{V}$  niech oznacza prędkość początku układu  $\Sigma'$  względem układu  $\Sigma$  a symbole  $\vec{v}$  i  $\vec{v}'$  opisują - odpowiednio - prędkości punkowego obiektu względem układu  $\Sigma$  i  $\Sigma'$ .

Ten banalny związek w sposób cokolwiek nieoczekiwany staje się źródłem kłopotów, jeżeli dopuścimy do tego, aby układy  $\Sigma$  i  $\Sigma'$  obracały się względem siebie. Załóżmy na przykład, że początek układu  $\Sigma'$  nie porusza się względem układu  $\Sigma$  (co jest możliwe przy

---

<sup>1</sup> Układ odniesienia, którego cokolwiek „konkretne” wyobrażenie tutaj wprowadziliśmy, pozwala na pozór sięgnąć wektorem wodzącym do dowolnego punktu w przestrzeni i odczytać jego współrzędne; tak nam się wydaje na podstawie naszych codziennych doświadczeń. Zauważmy jednak, że za takim stwierdzeniem kryje się założenie, że nasz trójwymiarowy świat jest płaski. Rozważmy na przykład nie-płaski świat dwuwymiarowy (choćby powierzchnię kuli) i spróbujmy w tym świecie zbudować z listew model dwuwymiarowego układu odniesienia. Od razu zaczynają się piętrzyć trudności, bo albo nasze proste listwy „wystają” poza świat, który mają sparametryzować, albo (jeżeli są łukami kół wielkich) natrafiamy na trudności z określeniem sposobu odczytywania współrzędnych podobnego do tego, jakiego używamy w świecie płaskim. Zauważmy, że opisane trudności stają się nieistotne, jeżeli wybrany układ odniesienia służy tylko do opisu bezpośredniego otoczenia punktu, w którym połączono listwy. Dziś wiemy już, że przestrzeń, w której żyjemy, jest nieco zakrzywiona, ale efekty z tym związane są tak małe, że nie mają znaczenia przy rozwiązywaniu klasycznych zagadnień mechanicznych. Ten przypis pojawił się więc po to, aby uzasadnić, sformułowanie o „punktach bliskich początku układu odniesienia”.

wzajemnym obracaniu się układów: z punktu widzenia układu  $\Sigma$  układ  $\Sigma'$  wiruje wtedy wokół swego nieruchomego początku). Oznacza to, że  $\vec{V} = 0$ . Z omawianego wzoru na składanie prędkości mielibyśmy w tym przypadku  $\vec{v} = \vec{v}'$ . Załóżmy dalej, dla uproszczenia, że  $\vec{v} = 0$ , czyli że obiekt  $P$  spoczywa względem układu  $\Sigma$ . Wynikający z tego rozumowania wniosek  $\vec{v}' = 0$  jest jednak zupełnie nie do przyjęcia: obserwator z układu  $\Sigma'$  (wirujący wraz z nim) nie zgodzi się z twierdzeniem, że prędkość punktu  $P$ , obserwowana z układu  $\Sigma'$ , wynosi zero.

Chwila namysłu wystarczy, by zrozumieć, że przyczyną, dla której szkolny wzór na „składanie prędkości”  $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$  sprawia kłopoty, jest to, iż dopuściliśmy do wzajemnego obracania się obydwu układów. W tej sytuacji uznalibyśmy za korzystne, gdyby Przyroda w jakiś sposób sama wykreowała klasę nie obracających się (a więc też nie obracających się względem siebie) układów odniesienia. Zauważmy, że nasze wymaganie jest bardzo daleko idące. Od początku naszej edukacji (prawie od początku) wpajano nam, że ruch jest pojęciem względnym, że w przypadku dwóch poruszających się względem siebie układów odniesienia (wliczając w to wzajemne wirowanie układów) nie można arbitralnie uznać, który z układów jest nieruchomy, a który się porusza. Teraz dowiemy się, że jednak „trochę można”. Okazuje się, że obracanie się układu jest w pewnym sensie bezwzględne, że stwierdzenie „ten układ nie obraca się a inny się obraca” ma sens obiektywny. Możliwości odróżnienia układów obracających się od tych wyróżnionych, nie obracających się, dostarczają odkryte przez Newtona prawa dynamiki, a dokładnie pierwsze dwa z tych praw, które można ująć w jedno stwierdzenie:

*Istnieje wyróżniona klasa nie obracających się względem siebie układów odniesienia, pozostających względem siebie w spoczynku, lub poruszających się względem siebie ruchem jednostajnym, względem których prawdziwe jest następujące zdanie: pochodna pędu punktu materialnego po czasie równa jest niezrównoważonej sile działającej na ten punkt.*

Ten wyróżniony zbiór układów nazwano klasą **inercjalnych układów odniesienia**. Układów tych jest oczywiście nieskończenie wiele.

## II. WIĘZY I WSPÓŁRZĘDNE UOGÓLNIONE

Rozważamy ruch punktu materialnego poddanego działaniu znanego pola sił. Jeżeli ten ruch może odbywać się bez żadnych ograniczeń w przestrzeni trójwymiarowej, to mówimy o ruchu bez więzów. Może się jednak okazać, że przestrzeń, w której punkt materialny może się poruszać, jest ograniczona w taki sposób, że nie wszystkie punkty tej przestrzeni są dostępne w dowolnej chwili: na współrzędne  $x, y, z$  punktu materialnego może być na przykład narzucony warunek  $f(x, y, z) = 0$ . Warunek taki równoważny byłby zadaniu w przestrzeni trójwymiarowej pewnej powierzchni (współrzędne punktów leżących na tej powierzchni powinny spełniać równanie  $f = 0$ ). Na przykład równanie  $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$  wyznacza sferę o promieniu  $r$  i środku leżącym w początku układu odniesienia. Zauważmy, że wprowadzenie jednego równania zawęży przestrzeń dostępną dla cząstki o jeden wymiar (powierzchnia sfery jest dwuwymiarowa). Za wyjątkiem przypadków szczególnych, które niżej rozważymy, każde kolejne równanie zabiera jeden wymiar: drugie równanie (np.  $z - b = 0$ , gdzie  $b$  jest stałą spełniającą warunek  $|b| < r$ ) zabiera kolejny wymiar: cząstce

pozostaje już tylko świat jednowymiarowy (w naszym przykładzie byłby to okrąg leżący na sferze w miejscu odpowiedniego „równoleżnika”). Narzucenie kolejnego równania na ogół zabrałoby ostatni wymiar: cząstka zostałaby zablokowana w punkcie, w którym przecinałyby się trzy zadane powierzchnie (pod warunkiem, że taki punkt istniałby). Tu widać przyczynę, dla której kilka wierszy wyżej poczyniliśmy zastrzeżenie: opisany obraz odpowiada sytuacji, kiedy kolejne zadawane powierzchnie więzów (bo tak je nazwiemy) przecinają się, to znaczy kiedy układ równań

$$f_1(x, y, z) = 0, f_2(x, y, z) = 0, \dots$$

nie jest układem sprzecznym.

Dla układów fizycznych złożonych z większej liczby punktów materialnych (niech  $n$  oznacza ich liczbę) odpowiednio rośnie liczba współrzędnych i rośnie też liczba sposobów ograniczania dostępnej  $3n$  wymiarowej przestrzeni współrzędnych. Każde równanie  $f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0$  narzucone na współrzędne  $x_1, \dots, z_n$  nazwiemy równaniem więzów. Na przykład określone dla dwóch punktów równanie  $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - r^2 = 0$  nie oznacza już zadania sztywnych powierzchni w przestrzeni trójwymiarowej, tylko wymusza stałą wzajemną odległość tych dwóch punktów. Odpowiadałoby to połączeniu tych punktów nieważkim sztywnym prętem o długości  $r$ .

Podane tu przykłady równań więzów miały jedną wspólną cechę: wśród argumentów funkcji  $f$  nie było czasu. Więzy o tej własności nazwano **więzami skleronomicznymi**. Jeżeli chociaż jedna funkcja  $f$  zależy jawnie od czasu, to mówimy że zadaliśmy **więzy reonomiczne**.

Przykłady:

1. Równanie  $x^2 + y^2 + z^2 - [r(t)]^2 = 0$  jest równaniem więzów reonomicznych dla jednego punktu materialnego poruszającego się po powierzchni kuli, której promień zależy od czasu w sposób opisany daną funkcją  $r(t)$ , niezależny od ruchu punktu materialnego.
2. Para równań

$$\operatorname{tg} \vartheta - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = 0, \quad x \cos \omega t - y \sin \omega t = 0,$$

z których pierwsze jest równaniem stożka o osi symetrii równoległej do osi  $z$  i kącie wierzchołkowym równym  $2\vartheta$ , a drugie jest równaniem płaszczyzny zawierającej oś  $z$  i wirującej wokół tej osi ze stałą prędkością kątową  $\omega$ , definiuje więzy reonomiczne dla pojedynczego punktu materialnego. Może on się tu poruszać po prostej przechodzącej przez początek układu odniesienia, nachylonej do osi  $z$  pod stałym kątem  $\vartheta$  i wirującej wokół osi  $z$  ze stałą (narzuconą!) prędkością kątową  $\omega$ .

3. Rozważone już wcześniej równanie  $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - r^2 = 0$  definiuje pewne więzy skleronomiczne dla pary punktów materialnych (istotna jest nieobecność parametru  $t$  w równaniu więzów). Tak więc więzy skleronomiczne nie muszą oznaczać nieruchomych powierzchni w przestrzeni, ale też stała powierzchnia

może być elementem układu więzów reonomicznych (jak stożek w poprzednim przykładzie).<sup>2</sup>

Szczególnym przykładem obecności więzów w układzie mechanicznym jest przypadek bryły sztywnej. Jeżeli dla wszystkich (lub tylko dla części) punktów materialnych, wchodzących w skład układu mechanicznego, określono takie więzy, że wzajemne odległości tych punktów nie mogą się zmieniać, to jest to równoważne stwierdzeniu, że te punkty stanowią bryłę sztywną. Realna bryła sztywna, wchodząca w skład urządzenia mechanicznego, powinna być oczywiście traktowana jako składająca się z nieskończenie wielu punktów materialnych.

Pojęcie więzów wprowadziliśmy do naszego wykładu w sposób formalny. Warto jednak uświadomić sobie, że dowolna „maszyna”, której ruch może być wyznaczony przez prawa mechaniki, zawiera na ogół więzy. Walec toczący się bez poślizgu, oprócz więzów spajających poszczególne jego punkty w jedną bryłę sztywną, ograniczony jest więzami uniemożliwiającymi poślizg: każdemu przesunięciu walca musi towarzyszyć odpowiedni obrót.

Jak już mówiliśmy, równania więzów zmniejszają liczbę niezależnych współrzędnych  $n$  punktów materialnych stanowiących układ mechaniczny. Każde kolejne równanie zabiera jedną z początkowych  $3n$  niezależnych zmiennych, przy czym pytanie o to, która ze zmiennych jest eliminowana, byłoby na ogół źle postawione. Przyjrzyjmy się przykładom:

1. Rozważmy jeden punkt materialny o współrzędnych kartezjańskich  $x, y, z$  z więzem  $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ . Nie sposób wskazać, która z trzech zmiennych została tu wyeliminowana, chociaż nie mamy wątpliwości, że układ mechaniczny podlega tu opisowi przez  $d, w, i, e$  zmienne przestrzenne. Gdybyśmy w charakterze tych zmiennych wybrali współrzędne  $x, y$  (a więc współrzędna  $z$  byłaby tą zmienną eliminowaną), to prosty rysunek przekona nas, że istnieją  $d, w, a$  punkty na powierzchni kuli o danych współrzędnych  $x, y$  (oczywiście pod warunkiem, że  $x^2 + y^2 < r^2$ ). Tak więc współrzędne  $x, y$  nie nadają się do jednoznacznego lokalizowania punktu materialnego ograniczonego opisanymi więzami.
2. W przypadku jednego punktu materialnego ograniczonego więzami opisanymi równaniem  $z = 0$  nie mamy wątpliwości, że eliminowana jest zmienna  $z$  a pozostałe zmienne  $x, y$  pozostają dowolne i mogą służyć jako współrzędne opisujące położenie punktu materialnego na powierzchni więzów.

Te dwa przykłady przekonują nas o tym, że dopisywanie kolejnych równań więzów nie sprowadza się na ogół do prostego wykreślania kolejnych współrzędnych kartezjańskich opisujących położenie punktów materialnych. Przyczyna leży w tym, że pozostałe współrzędne kartezjańskie nie gwarantują na ogół jednoznacznej lokalizacji punktów materialnych na więzach. Daje nam to motywację do poszukiwania takich współrzędnych przestrzennych, które

---

<sup>2</sup> Jak się przekonamy w dalszej części wykładu, więzy skleronomiczne nie wykonują pracy w tym sensie, że łączna energia układu punktów materialnych, których swoboda ograniczona jest przez układ więzów skleronomicznych, nie zmienia się pod wpływem sił, z jakimi więzy działają na te punkty materialne. W przypadku więzów reonomicznych twierdzenie to okaże się nieprawdziwe.

1. Gwarantują jednoznaczłą lokalizację punktów materialnych na więzach. (Jak się już przekonaliśmy, współrzędne kartezjańskie  $x, y$  nie spełniają tego warunku w odniesieniu do punktu na sferze.)
2. Są niezależne, to znaczy wartość każdej z tych współrzędnych możemy wybrać niezależnie od wartości pozostałych współrzędnych. Ten drugi warunek ściśle wiąże się z liczbą punktów materialnych wchodzących w skład układu mechanicznego i liczbą równań więzów. Nietrudno zrozumieć, że omawiany warunek wymusza, aby liczba tych współrzędnych była nie większa niż  $3n - k$ , gdzie  $n$  jest liczbą punktów materialnych a  $k$  jest liczbą równań więzów. Chwila namysłu wystarczy do stwierdzenia, że liczba ta nie może być również mniejsza niż  $3n - k$ : dla  $n$  punktów zaczęliśmy od  $3n$  współrzędnych kartezjańskich, na które nałożyliśmy  $k$  warunków. Mówimy, że układowi pozostawiliśmy  $3n - k = s$  **stopni swobody**.

Komplet współrzędnych wybranych dla danego układu mechanicznego, spełniających powyższe dwa warunki, nazywamy **współrzędnymi uogólnionymi** i oznaczamy tradycyjnie symbolami  $q_1, q_2, \dots, q_s$ .

Musimy więc nabrać umiejętności wybierania współrzędnych uogólnionych dla zadanego układu punktów materialnych ograniczonych więzami. Wyboru tego możemy bowiem zawsze dokonać na nieskończenie wiele sposobów i trzeba kierować się kryteriami wygody. Z czasem, rozwiązując zadania, nabierzemy odpowiedniej wprawy. Na razie popatrzmy na kilka przykładów:

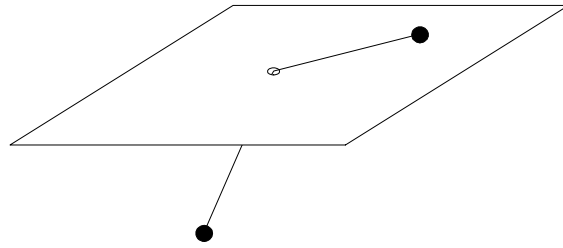
1. Rozważana już pojedyncza cząstka na sferze o zadanym promieniu. Układ ma dwa stopnie swobody. Oto kilka przykładów współrzędnych uogólnionych dla tego układu:
  - a. Zmienne kątowe  $\vartheta, \varphi$  (te same, które występują we współrzędnych sferycznych). Ich zakresy zmienności nie wymagają omawiania.
  - b. Zmienna  $\varphi$  (ta sama, co w punkcie „a”) i zmienna „z”, która w tym przypadku zmienia się w przedziale  $-r \leq z \leq r$ . Bardzo wskazanym ćwiczeniem byłoby wykonanie odpowiedniego rysunku.

#### ZADANIE 2.1

Czy współrzędne  $z, \vartheta$  są kolejnym poprawnym przykładem? (odpowiedź jest negatywna i należy to uzasadnić).

- c. Podobne konstrukcje wyróżniające inny kierunek w przestrzeni (dwie wyżej pokazane konstrukcje wyróżniały kierunek osi „z”). Kierunek wyróżniony przez układ współrzędnych uogólnionych powinien się pokrywać z ew. kierunkiem wyróżnionym przez warunki fizyczne. Jeżeli na przykład rozważamy ruch punktu materialnego na sferze w jednorodnym polu grawitacyjnym, to z przyczyn techniczno-rachunkowych postąpimy rozsądnie jeżeli oś  $z$  skierujemy zgodnie z tym polem i wprowadzimy współrzędne takie, jak w punkcie „a” lub „b”.

2. Układ dwóch punktów pokazany na rysunku. W poziomym blacie jest otwór, przez który przeciągnięto nierozciągliwą nić o zadanej długości. Punkty znajdują się na końcach tej nici. Jeden z nich może poruszać się po blacie, drugi waha się

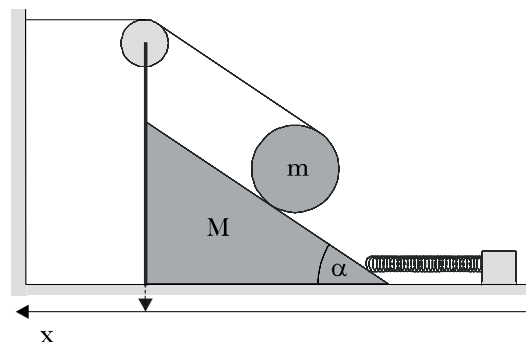


swobodnie pod blatem (np. w polu grawitacyjnym). Zakładamy, że ruch odbywa się w taki sposób, że nić jest ciągle naprężona, a w otworze nie występuje tarcie. Naszym zadaniem jest podanie liczby stopni swobody i wskazanie jakiegoś poprawnego kompletu współrzędnych uogólnionych. Zaczynijmy od ustalenia liczby stopni swobody  $s$ , która - jak już wiemy - jest wspólna dla wszystkich możliwych do zaproponowania kompletów współrzędnych uogólnionych. Podany wyżej związek  $s = 3n - k$  nie zawsze jest wygodny dla obliczenia liczby  $s$ . Zwykle łatwiej jest podać ją bezpośrednio przyglądając się układowi mechanicznemu. W tym przypadku mamy punkt na płaszczyźnie, co daje dwa stopnie swobody (odpowiadające np. dwóm współrzędnym kartezjańskim tego punktu) i drugi punkt, którego odległość od otworu uwarunkowana jest położeniem pierwszego punktu (nić jest nierozciągliwa). Pozostają więc dla niego tylko dwie współrzędne kątowe określające kierunek wahającej się części nitki. Razem - 4 stopnie swobody. Formalna droga do tej „czwórki” byłaby następująca: dwa punkty w trójwymiarowym świecie, to  $3n = 6$  współrzędnych kartezjańskich. Od tego odejmujemy jedynekę z tytułu równania płaszczyzny  $z_1 = 0$  (niech początek kartezjańskiego układu odniesienia znajduje się tam, gdzie otwór, a oś „z” niech będzie prostopadła do blatu) i drugą jedynekę w związku z kolejnym równaniem więzów „pilnującym” stałej długości nitki:

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} - l = 0.$$

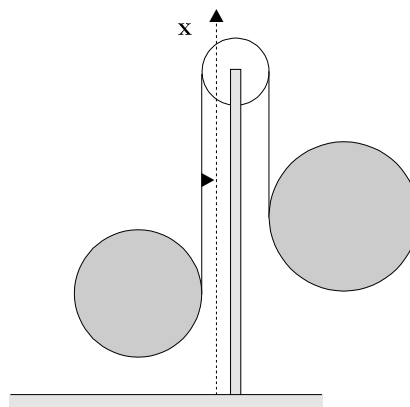
Zwykle, licząc stopnie swobody, równocześnie wymyślamy komplet współrzędnych uogólnionych.

Na osobne omówienie zasługują układy mechaniczne zawierające bryły sztywne. Tu liczba punktów materialnych jest w zasadzie nieskończona i droga do liczby  $s$  poprzez wzór  $s = 3n - k$  jest z oczywistych powodów niemożliwa do zrealizowania. W takich przypadkach musimy więc liczbę stopni swobody odczytywać bezpośrednio (niejako po drodze wybierając poprawny zestaw współrzędnych uogólnionych). Wróćmy na przykład do układu mechanicznego opisanego we „Wstępie”. Układ zawiera wiele ruchomych elementów, ale - jak się łatwo można przekonać - posiada tylko jeden stopień swobody. Wynika to z tego, że położenie równi determinuje położenie wszystkich pozostałych elementów. Tak więc współrzędną uogólnioną może być na przykład położenie równi na stole mierzone podziałką pokazaną na rysunku. Zauważmy, że



gdyby walec mógł poruszać się po równi z poślizgiem, to liczba stopni swobody wzrosłaby do dwóch (przy założeniu, że oś walca musiałaby pozostać prostopadła do płaszczyzny rysunku). Tą drugą współzrzedną mogłaby być na przykład długość odwiniętej części nici, albo kąt obrotu walca.

Rozważmy inny przykład: dwa walce, na które nawinięto nić przerzuconą przez nieważki bloczek. Zakładamy, że walce mogą poruszać się tylko pionowo, odwijając, lub nawijając nić. Próbujemy policzyć stopnie swobody. Obydwa walce na pewno mogą się obracać niezależnie od siebie odpowiednio przesuwając się przy tym w pionie. Mamy więc już dwa stopnie swobody, za które mogą odpowiadać kąty obrotu walców. Oczywiście trzeba zdecydować, które kierunki obrotów odpowiadają dodatnim przyrostom tych kątów. Dla ustalonych kątów cały układ może się jeszcze poruszać przesuwając nić przez bloczek (jeden walec przy tym opada, drugi się podnosi). Odpowiada to trzeciemu (i ostatniemu) stopniowi swobody, który występuje w tym układzie. Jako odpowiadającą mu współzrzedną uogólnioną możemy przyjąć pionowe przesunięcie lewej (ale równie dobrze prawej) gałęzi nitki. Na nitce wyobrażamy sobie znaczek, który wskaże położenie nitki względem dowolnej pionowej skali. Równie dobrym kompletem współzrzednych uogólnionych byłyby te same dwa kąty i odległość między jednym z walców i stołem, albo też odległości obydwu walców od stołu i kąt obrotu jednego z nich.



### III. RÓWNANIA LAGRANGE'A

Jak już wspominaliśmy, ruch punktu materialnego jest w całości wyznaczony przez zasady Newtona: znając siły działające na punkt materialny znamy zarazem jego przyspieszenie względem dowolnego układu inercjalnego. Znajomość aktualnego położenia i prędkości punktu materialnego pozwala - przy znanej prędkości i przyspieszeniu - przewidzieć zmianę jego położenia i prędkości, czyli przewidzieć dalszy ruch<sup>3</sup>.

Pokażemy teraz pewną metodę przewidywania ruchu układów mechanicznych, wygodniejszą od korzystającej bezpośrednio z zasad dynamiki Newtona. Usprawnienie polegać będzie na tym, że przetłumaczymy zasady dynamiki z języka zmiennych kartezjańskich (których - jak już ustaliliśmy - jest zwykle za dużo w stosunku do rzeczywistej liczby stopni swobody) na język współzrzednych uogólnionych, wybieranych specjalnie do opisu danego układu mechanicznego.

Wiemy już, że za przyspieszenie danego punktu materialnego odpowiadają siły działające na ten punkt. Ze wszystkich sił działających na punkty materialne, będące składnikami układu mechanicznego, wyodrębnimy siły reakcji. Są to siły, jakimi więzy oddziałują na te punkty materialne. Na przykład dla wahadła matematycznego będzie to, działające w stronę punktu zawieszenia, naprężenie nitki. Dla punktu poruszającego się po zadanej powierzchni więzów będzie to siła, z jaką ta powierzchnia działa na ten punkt. (Zauważmy, że w wahadle również możemy zastąpić nitkę odpowiednią powierzchnią

<sup>3</sup> Taką procedurę, rozwijaną krok po kroku, stosuje komputer rozwiązując problemy z mechaniki.



sferyczną, po której punkt materialny musiałby się poruszać bez tarcia.) Dla bryły sztywnej będą to między innymi naprężenia, jakimi poszczególne punkty, składające się na bryłę, oddziałują ze sobą (wrócimy do tego zagadnienia niżej).

Zacznijmy od rozważenia najprostszego przypadku, gdy więzami są sztywne nieruchome powierzchnie, lub krzywe, po których poruszają się bez tarcia punkty materialne. Przy nieobecności tarcia, siły reakcji, jakimi takie więzy oddziałują na punkty materialne, są zawsze lokalnie prostopadłe do odpowiednich powierzchni (lub krzywych). Niech wektor  $\vec{\delta x}$  będzie styczny do powierzchni (krzywej) więzów w punkcie, w którym znajduje się punkt materialny o masie  $m$ , a  $\vec{F}$  niech oznacza siłę działającą na ten punkt materialny ze strony pola sił będącego elementem rozważanego układu mechanicznego. Może to być na przykład pole grawitacyjne, elektromagnetyczne czy siła ze strony naprężonej sprężyny. Związek

$$(m\ddot{\vec{x}} - \vec{F}) \cdot \vec{\delta x} = 0$$

jest prawdziwy dla dowolnego wektora  $\vec{\delta x}$  stycznego do więzów w punkcie, w którym znajduje się punkt materialny. Wynika to z tego, że  $m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} + \vec{R}$  i z tego, że siła reakcji  $\vec{R}$  jest (przy nieobecności tarcia) lokalnie prostopadła do więzów. Jeżeli układ składa się z większej liczby punktów materialnych, a więzy pozostają sztywnymi nieruchomymi konstrukcjami przestrzennymi, to powyższy związek zachodzi osobno dla każdego punktu materialnego.

W przypadku dowolnego układu mechanicznego z więzami sytuacja jest jednak nieco bardziej skomplikowana. W opisanej tu szczególnej sytuacji więzy zadane są bowiem równaniami typu  $f(\dots) = 0$ , gdzie w zbiorze argumentów (...) każdej funkcji  $f$  występują współrzędne tylko jednego z punktów materialnych. W sytuacji ogólnej, gdy mamy  $n$  punktów materialnych o współrzędnych  $x_1, \dots, z_n$  ograniczonych  $k$  równaniami więzów  $f_1(x_1, \dots, z_n) = 0, \dots, f_k(x_1, \dots, z_n) = 0$  (na razie ograniczymy się do więzów skleronomicznych), więzy nie są już sztywnymi i nieruchomymi obiektami geometrycznymi. Oto przykłady:

1. Dwa punkty materialne połączone sztywnym nieważkim prętem.
2. Dwa walce połączone nitką przerzuconą przez nieważki bloczek (por. rysunek na poprzedniej stronie).
3. Dwa punkty materialne, z których jeden znajduje się na jednym końcu nici, drugi jest nawleczony na nią (jak koralik) a drugi koniec nici jest przytwierdzony do ustalonego punktu (rysunek na następnej stronie). Oczywiście zakładamy, że ruch odbywa się w taki sposób, aby nitka pozostawała napięta.

We wszystkich wymienionych przykładach więzy nie są już nieruchomymi obiektami geometrycznymi a ich rola polega na koordynowaniu ruchów poszczególnych elementów układu mechanicznego.

Wyobraźmy sobie, że fotografujemy układ mechaniczny wykonujący ruch zgodnie z zasadami dynamiki. Na tej fotografii uchwycimy wszystkie punkty materialne i wszystkie więzy. Za **przesunięcie wirtualne zgodne z więzami** uważamy dowolne nieskończenie małe przesunięcie całego układu mechanicznego pokazanego na fotografii, opisane nieskończenie małymi przyrostami  $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \dots, \delta z_n$ , które jest zgodne z równaniami więzów. Chodzi o to, aby w wyniku tego przesunięcia poszczególne punkty układu mechanicznego zajęły nowe pozycje, których współrzędne spełniają równania więzów z dokładnością do nieskończenie

małych drugiego rzędu. Wyjaśnimy to na powyższych trzech przykładach ilustrując te wyjaśnienia rysunkami:

ad1. Pokazany tu zespół dwóch przesunięć jest zgodny z więzami w przypadku pierwszych trzech rysunków, ale już przesunięcia pokazane na ostatnim rysunku nie stanowią łącznie przesunięcia zgodnego z więzami.

1.



2.



3.

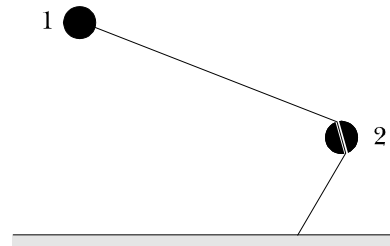


4.



ad 2. Zgodny z więzami byłby na przykład równoczesny niewielki obrót obydwu walców (lewego w lewo, prawego w prawo), z równoczesnym odpowiednim ich obniżeniem (tak, aby nitka pozostała napięta).

ad 3. Dozwolone są wszystkie takie równoczesne przesunięcia punktów 1 i 2, aby zachowana była suma odległości między punktami 1 i 2 oraz między punktem 2 i punktem zakotwiczenia nitki.



Zauważmy, że we wszystkich tych przypadkach wypisany dla pojedynczego punktu materialnego związek

$$(m\ddot{\vec{x}} - \vec{F}) \cdot \delta\vec{x} = 0$$

przestaje na ogół być prawdziwy, jeżeli przez  $\delta\vec{x}$  rozumiemy przesunięcie tego punktu zgodne z więzami (ponieważ - jak to widać na naszych przykładach - przesunięcie to nie musi już być prostopadłe do siły reakcji więzów). Musimy więc poszukać odpowiedniego uogólnienia tego związku.<sup>4</sup>

W tym celu musimy skupić uwagę na więzach traktowanych jako pewna fikcyjna konstrukcja techniczna. Jej fikcyjność - obok wcześniej założonego braku tarcia - polega na tym, że elementy więzów są nieważkie (nie wykazują bezwładności). Sztywny pręt łączący punkty, wszystkie nitki i bloczki są w opisanych zadaniach mechanicznych przyjmowane jako nieważkie. W przeciwnym wypadku musielibyśmy je traktować tak samo, jak zbiory

<sup>4</sup> Nie wiemy jeszcze, do czego ten związek (a zwłaszcza jego uogólnienie) będzie nam potrzebny. Musimy się uzbroić w cierpliwość.

obdarzonych masą punktów materialnych wchodzących w skład układu. Elementy konstrukcji więzów są dwóch rodzajów. Jedne z nich oddziałują tylko z punktami materialnymi wchodzącymi w skład układu mechanicznego (na przykład pręt łączący punkty), inne oddziałują zarówno z elementami układu, jak i ze stałymi punktami otoczenia, na przykład nitka łącząca obydwaj walce, wraz z nieważkim bloczkiem, oddziałuje ze stałym punktem otoczenia, jakim jest oś bloczka, także nitka, na którą nanizano punkt 2 (bo oddziałuje z nieruchomym punktem otoczenia). Zaliczyć tu też należy wszystkie sztywne stałe konstrukcje, sztywno połączone z otoczeniem (dobrym przykładem jest powierzchnia równi, jeśli równia jest przymocowana do stołu). Wszystkie te elementy więzów, jako uchwycone „w otoczeniu”, oddziałują z nim siłami reakcji.

Wyobraźmy sobie pewien układ mechaniczny z więzami, będący w ruchu, i „zróbmy mu zdjęcie”, czyli odnotujmy jego konfigurację w pewnej chwili, wraz ze wszystkimi siłami, jakim w danej chwili podlega konstrukcja więzów. Do sił tych zaliczymy wszystkie siły reakcji więzów wzięte ze znakiem minus (tu czerpiemy z III zasady dynamiki) a także siły, z jakimi otoczenie oddziałuje na elementy więzów. Skoro elementy więzów pozbawione są bezwładności (co założyliśmy), to wymienione siły, jakim podlegają więzy, (a także wszystkie momenty tych sił obliczane względem dowolnego punktu w przestrzeni) muszą dokładnie się znosić. Gdyby bowiem było inaczej, to elementy konstrukcji więzów musiałyby podlegać nieskończonym przyspieszeniom (liniowym lub kątowym). Wynika z tego, że moglibyśmy uchwycić położenie układu mechanicznego w dowolnej chwili, usunąć wszystkie punkty materialne, zadbać o to, by na więzy działały niezmiennione siły (czyli działające podczas ruchu siły reakcji, ale z przeciwnymi znakami, oraz siły ze strony otoczenia) i uzyskalibyśmy w ten sposób układ w równowadze zbudowany z nieważkich elementów. Wyobraźmy sobie, że wytworzyliśmy taką właśnie sytuację. Moglibyśmy teraz przeprowadzić dowolną nieskończenie małą, zgodną z więzami, zmianę konfiguracji całego układu i mielibyśmy gwarancję tego, że nie musielibyśmy wykonać przy tym żadnej pracy. Taka zmiana konfiguracji polegałaby na wykonaniu odpowiednio skoordynowanych zmian wszystkich współrzędnych  $x_1, \dots, z_n$ , przy czym mielibyśmy pewność, że wykonana przy tym praca, czyli wyrażenie

$$\sum_{i=1}^{3n} R_i \delta X_i = \sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta X_i$$

jest równa zero.<sup>5</sup> Przyjęliśmy tu oczywiście zapis, zgodnie z którym  $m_1 = m_2 = m_3$  jest masą pierwszego punktu materialnego,  $m_4 = m_5 = m_6$  drugiego itd.,  $R_1, R_2, R_3$  są składowymi siłami reakcji działającej na pierwszy punkt materialny, podobnie  $R_4, R_5, R_6$  - na drugi itd. Komplet wariacji  $(\delta X_1, \dots, \delta X_{3n})$  oznacza przesunięcie zgodne z więzami. Suma, którą tu rozważamy, jest sumą iloczynów skalarnych kolejnych sił reakcji przez wektory zgodnych z więzami przesunięć odpowiednich punktów materialnych.

Osobnego omówienia wymaga przypadek więzów reonomicznych, chociaż wynik rozumowania okaże się taki sam. Wynika to z tego, że więzy te również możemy traktować jako nieważkie. „Fotografując” ruch w dowolnej chwili możemy zbilansować wszystkie siły

<sup>5</sup> Wspomniany układ więzów, ogołocony z mas i obciążony wiernie odtworzonym kompletem sił reakcji, jest w równowadze. Wiemy już, że do tego kompletu sił, dla uzyskania równowagi, zaliczyć też musimy siły, z jakimi stałe elementy otoczenia oddziałują na więzy, jeżeli tylko w danym układzie mechanicznym takie siły występują. Siły te jednak nie mogą pracować w przypadku przesunięć wirtualnych, bo nie wiążą się z nimi żadne przesunięcia. Łączna praca (równa zero) sprowadza się więc do lewej strony ostatniego wzoru.

reakcji oraz ich momenty i również dojdziemy do wniosku, że bilans ten musi być zerowy. Należy tylko pamiętać, że zbiór przesunięć zgodnych z więzami  $\delta X_i$  nie będzie się w tym przypadku pokrywał z rzeczywistymi przesunięciami punktów materialnych po uruchomieniu układu. Pokażemy to na przykładzie.

Rozważymy nieważki pręt, oparty dolnym końcem o początek układu odniesienia, odchylony od pionu o stały kąt i wirujący z zadaną prędkością kątową wokół pionowej osi „z”. Można sobie wyobrazić, że oś „z” jest częścią korby, którą ktoś obraca z narzuconą (niekoniecznie stałą) prędkością. Na pręt nanizany jest koralik o znanej masie. Mamy więc tu przypadek pojedynczego punktu materialnego ograniczonego więzami reonomicznymi.

Siła reakcji, jaką koralik działa na pręt, jest oczywiście prostopadła do pręta i - co za tym idzie - do wirtualnego przesunięcia zgodnego z więzami, jakie moglibyśmy wykonać na „fotografii”. Przesunięcia rzeczywiste będą jednak inne, bo pręt się obraca. Tak więc w przypadku więzów skleronomicznych przesunięcie rzeczywiste jest zawsze jednym z możliwych przesunięć zgodnych z więzami. W przypadku więzów reonomicznych okoliczność ta na ogół nie zachodzi.

Pomimo tego jednak, dla przypadku więzów reonomicznych można powtórzyć bez zmiany całe rozumowanie, które doprowadziło nas do wniosku, że „siły reakcji nie pracują na przesunięciach wirtualnych”, jak to się czasami formułuje<sup>6</sup>.

Warto jeszcze wspomnieć o uogólnieniu, które jest konieczne w przypadku opisu ruchu układów mechanicznych zawierających rozciągnięte bryły sztywne, a nie same tylko punkty materialne. W takim przypadku każdą bryłę możemy traktować jako zbiór punktów materialnych przytwierdzonych do nieważkiego, przestrzennego „rusztowania” o kształcie rozważanej bryły, i ten nieważki szkielet włączyć do kompletu nieważkich więzów układu. Siłami reakcji będą w tym przypadku siły, jakimi ten nieważki szkielet działa na poszczególne punkty materialne, składające się na bryłę.

Wzór  $\sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta X_i = 0$  jest punktem wyjścia dla dalszego rozumowania.

Zauważmy, że zespół przesunięć wirtualnych  $\delta X_i$ , to nie jest na ogół zbiór dowolnych przyrostów  $\delta x_i$ ; dobierając przyrosty  $\delta X_i$  musimy uwzględniać warunki więzów. Z drugiej jednak strony wiemy, że możemy najzupełniej dowolnie wybrać komplet przyrostów  $\delta q_1, \dots, \delta q_s$ , ponieważ z definicji współrzędnych uogólnionych wynika, że generowany w ten sposób zbiór przyrostów współrzędnych kartezjańskich  $\delta x_i = \delta X_i$  będzie zgodny z więzami. Mamy więc

$$\delta X_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j,$$

czyli

---

<sup>6</sup> W przypadku więzów reonomicznych siły działające ze strony otoczenia (w naszym przykładzie byłyby to siły działające ze strony osi korby na pręt) również nie wykonują pracy, bo przesunięcia wirtualne odbywają się przy zamrożeniu jawnej zależności więzów od czasu (co skutkuje znikaniem pracy sił zewnętrznych działających ze strony otoczenia na więzy).

$$\sum_{j=1}^s \left( \sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0.$$

Związek ten musi zachodzić dla dowolnych kompletów przyrostów  $\delta q_1, \dots, \delta q_s$ , z czego wynika, że

$$\sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, s.$$

Ostatni związek wciąż jeszcze zawiera współrzędne kartezjańskie, które są na ogół od siebie zależne. Chcemy uwolnić się od tych współrzędnych. W tym celu udowodnimy najpierw, że jeżeli symbolem  $T$  oznaczymy energię kinetyczną układu mechanicznego

$$T = \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 = T(\dot{x}) = T[\dot{x}(\underline{q}, \dot{\underline{q}})] \quad (\text{komplet współrzędnych danego rodzaju, lub ich pochodnych, będziemy oznaczać podkreśleniem})$$

to

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}.$$

### ZADANIE 3.1

Rozważ cząstkę poruszającą się po powierzchni sfery o promieniu  $r$ . Dogodnymi współrzędnymi uogólnionymi dla tego przypadku są kąty  $\vartheta, \varphi$  przynależne do współrzędnych sferycznych. Wyraż energię kinetyczną cząstki przez zmienne  $\vartheta, \varphi$  i ich pochodne po czasie  $\dot{\vartheta}, \dot{\varphi}$ .

$$\text{Wynik: } T = \frac{mr^2}{2} [\dot{\vartheta}^2 + (\dot{\varphi})^2 \sin^2 \vartheta].$$

Obliczmy wyrażenie  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)$  (oznaczenia z prawej strony pochodnych pokazują, które zmienne są stałe przy różniczkowaniu cząstkowym):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \Big|_{\underline{\dot{q}} \setminus \dot{q}_j, \underline{q}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T[\dot{x}(\underline{\dot{q}}, \underline{q})]}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial T(\dot{x})}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \Big|_{\underline{\dot{q}} \setminus \dot{q}_j, \underline{q}} \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \bigg|_{\underline{\dot{q}} \setminus \dot{q}_j, \underline{q}} \right).$$

Obliczamy

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \bigg|_{\underline{\dot{q}} \setminus \dot{q}_j, \underline{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_{k=1}^s \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \bigg|_{\underline{\dot{q}} \setminus \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \bigg|_{\underline{q} \setminus q_j},$$

czyli

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \bigg|_{\underline{\dot{q}} \setminus \dot{q}_j, \underline{q}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \bigg|_{\underline{\dot{q}} \setminus \dot{q}_j, \underline{q}} \right) = \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right).$$

Osobno pokażemy, że

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}.$$

W tym celu obliczymy osobno obydwie strony tej równości:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t} \quad (\text{oczywiście drugi składnik może być różny od zera}$$

tylko w przypadku więzów reonomicznych),

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_{k=1}^s \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) = \sum_{k=1}^s \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t}.$$

Wracając do naszego rachunku, mamy więc

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j},$$

czyli

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}.$$

c.b.d.o.

Wracamy do naszego podstawowego związku:

$$\sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, s,$$

który na mocy powyższego możemy zapisać w postaci:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{3n} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = 0$$

Definiujemy składowe **siły uogólnionej**  $Q_1, \dots, Q_s$  wzorami

$$Q_j \equiv \sum_{i=1}^{3n} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad j = 1, \dots, s,$$

co prowadzi do zapisu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad \forall j = 1, \dots, s.$$

Mówimy, że pole sił o składowych  $F_i$  jest potencjalne, jeżeli istnieje **potencjał uogólniony**, tzn. taka funkcja położeń i prędkości  $U(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t) = U(\underline{x}(q), \underline{\dot{x}}(q, \dot{q}), t) \equiv V(q, \dot{q}, t)$ , że

$$F_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial U}{\partial x_i}.$$

Wśród argumentów potencjału uogólnionego, obok położeń i prędkości, dostrzegamy czas  $t$ . Tę możliwość wykorzystujemy w sytuacji, gdy pole sił jawnie zależy od czasu. Dobrym przykładem jest ruch cząstki naładowanej w zależnym od czasu polu elektromagnetycznym.

Zauważmy, że potencjał  $U(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t)$  jest uogólnieniem znanego ze szkoły, zwykłego potencjału pozycyjnego, którego gradient (ze znakiem minus) równy jest działającej sile  $\vec{F} = -\text{grad}U(\vec{x})$ .<sup>7</sup>

### ZADANIE 3.2

Udowodnij bezpośrednim rachunkiem, że dla sił działających na punkt materialny, naładowany ładunkiem  $q$ , ze strony pola elektromagnetycznego

<sup>7</sup> Warto sprawdzić, że pole sił tarcia nie jest polem potencjalnym.

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}), \quad \vec{E} = -\text{grad}\varphi(\vec{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}, \quad \vec{B} = \text{rot}\vec{A}(\vec{x}, t),$$

potencjałem uogólnionym jest funkcja  $U(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = q(\varphi(\vec{x}, t) - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t))$ . Zwróć uwagę na zastrzeżoną tu możliwość jawnej zależności pól od czasu.

Udowodnimy teraz, że

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{N}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{N}(q, \dot{q}, t)}{\partial q_j} = Q_j$$

Dowód:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{N}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{N}(q, \dot{q}, t)}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U[x(q), \dot{x}(q, \dot{q}), t]}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial U[x(q), \dot{x}(q, \dot{q}), t]}{\partial q_j} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial U(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial U(x, \dot{x}, t)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial U(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \\ &= \sum_{i=1}^{3n} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial U(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial U(x, \dot{x}, t)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial U(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \\ &= \sum_{i=1}^{3n} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial U(x, \dot{x}, t)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{3n} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial U(x, \dot{x}, t)}{\partial x_i} \right] \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \\ &= \sum_{i=1}^{3n} F_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = Q_j, \end{aligned}$$

c.b.d.o.

Nasze wyniki możemy teraz ująć w postaci  $s$  równań:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial q_j},$$

czyli

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, \dots, s,$$



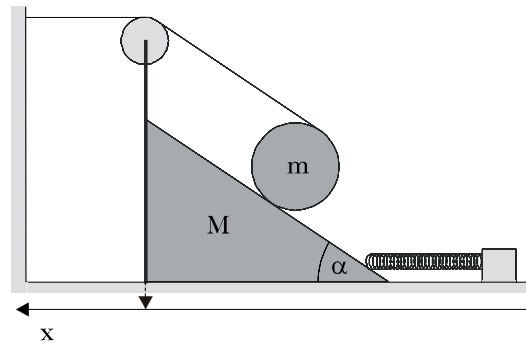
gdzie wielkość  $L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \equiv T(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) - V(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$  nazywamy **funkcją Lagrange'a** danego układu mechanicznego.<sup>8</sup>

Równania w ramce noszą nazwę **równań Lagrange'a drugiego rodzaju** i są zapisem zasad dynamiki (czyli równaniami ruchu) dla układu punktów materialnych ograniczonych więzami, poddanych działaniu potencjalnego pola sił. Istotna różnica między tymi równaniami i klasycznymi równaniami Newtona polega na tym, że uwalniamy się od śledzenia sił reakcji. Siły te stają się oczywiście istotne wtedy, gdy interesuje nas mechaniczna wytrzymałość więzów (siły reakcji obciążają więzy). Ten w zasadzie inżynierski problem rozwiązujemy przywołując tzw. **równania Lagrange'a pierwszego rodzaju**, którymi jednak nie będziemy się tu zajmować.

Równania Lagrange'a II rodzaju to układ  $s$  równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu na  $s$  funkcji czasu  $q_1(t), \dots, q_s(t)$ . Rozwiązania tych równań zależą więc od  $2s$  stałych, które możemy identyfikować z prędkościami początkowymi  $\dot{q}_1(t_0), \dots, \dot{q}_s(t_0)$  i z położeniami początkowymi  $q_1(t_0), \dots, q_s(t_0)$ .

Dla zademonstrowania pożytku płynącego z tych równań znajdziemy ruch układu mechanicznego opisanego we *Wstępie*.

W roli współrzędnej uogólnionej wybierzemy zmienną  $x$  zaznaczoną na rysunku, za pomocą której wyznaczamy położenie równi względem stołu. Układ ma jeden stopień swobody, a więc zmienna  $x(t)$  wyczerpuje zbiór zmiennych  $q_1(t), \dots, q_s(t)$ . Założymy, że ruch układu odbywa się w takim zakresie zmienności współrzędnej  $x$ , który gwarantuje to, że sprężyna będzie ciągle napięta.



Musimy teraz wyznaczyć funkcję Lagrange'a  $L[x(t), \dot{x}(t)]$ . Zauważmy, że z przesunięciem  $\Delta x$  wiąże się kąt obrotu walca  $\Delta\varphi$ :

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta x}{2r},$$

gdzie  $r$  oznacza promień walca, z czego wynika że między prędkością kątową walca  $\dot{\varphi}$  i prędkością  $\dot{x}$  zachodzi związek  $\dot{\varphi} = \frac{\dot{x}}{2r}$ .

Jesteśmy gotowi do napisania funkcji Lagrange'a. Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznej równi, energii kinetycznej ruchu postępowego walca i energii kinetycznej ruchu obrotowego walca ( $\frac{\dot{x}}{2} \sin \alpha$  jest pionową składową prędkości postępowego ruchu środka walca w układzie stołu,  $\dot{x} - \frac{\dot{x}}{2} \cos \alpha$  jest poziomą składową tej prędkości)

<sup>8</sup> Jak już wiemy, jawny parametr  $t$ , wśród argumentów funkcji Lagrange'a, występuje w przypadkach pól sił zależnych od czasu. Może się też pojawić, gdy występują więzy reonomiczne (przykład takiej sytuacji pokażemy w dalszym ciągu wykładu).

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left( \left( \frac{\dot{x}}{2} \sin \alpha \right)^2 + \left( \dot{x} - \frac{\dot{x}}{2} \cos \alpha \right)^2 \right) + \frac{1}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{\dot{x}^2}{2} \left[ M + m \left( \frac{11}{8} - \cos \alpha \right) \right].$$

Na energię potencjalną składa się energia grawitacyjna i energia sprężyny. Mamy więc:

$$V(x) = -\frac{1}{2} mgx \sin \alpha + \frac{1}{2} kx^2 \quad (\text{bo wzrostowi wartości współrzędnej } x \text{ o } \Delta x \text{ towarzyszy opadanie środka masy walca o odcinek } \frac{1}{2} \Delta x \sin \alpha).$$

Założyliśmy więc, że wartości współrzędnej  $x = 0$  odpowiada takie położenie równi, przy którym sprężyna ma długość neutralną. Zauważmy też, że najzupełniej dowolnie wybraliśmy „poziom zerowy” dla potencjału grawitacyjnego. Wiąże się to z możliwością przecechowania potencjału o dowolną stałą addytywną  $C$

$$V(x) \rightarrow V'(x) = V(x) + C$$

bez naruszania pola sił reprezentowanego tym potencjałem.

Mamy więc funkcję Lagrange'a:

$$L(x, \dot{x}) = T(x, \dot{x}) - V(x) = \frac{\dot{x}^2}{2} \left[ M + m \left( \frac{11}{8} - \cos \alpha \right) \right] + \frac{1}{2} mgx \sin \alpha - \frac{1}{2} kx^2.$$

Wypisujemy równanie Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left\{ \dot{x} \left[ M + m \left( \frac{11}{8} - \cos \alpha \right) \right] \right\} - \frac{1}{2} mg \sin \alpha + kx = 0,$$

i przekształcamy je do postaci

$$\left[ M + m \left( \frac{11}{8} - \cos \alpha \right) \right] \ddot{x} = -k \left( x - \frac{mg \sin \alpha}{2k} \right),$$

W tym ostatnim równaniu rozpoznajemy równanie jednowymiarowego oscylatora harmonicznego

$$\mu \ddot{x} = -k(x - x_0),$$

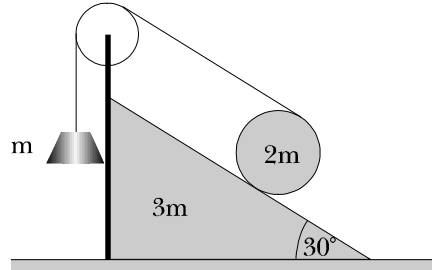
w którym w roli współczynnika odpowiedzialnego za bezwładność występuje zawartość nawiasu kwadratowego (uwzględniająca bezwładność walca i równi). Wartość współrzędnej  $x_0 = \frac{mg \sin \alpha}{2k}$  odpowiada położeniu równowagi, w którym ciężar walca równoważy napięcie sprężyny. Możemy od razu napisać rozwiązanie równania ruchu:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

gdzie  $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$  a stałe  $A$  oraz  $\varphi_0$  wyznaczamy z warunków początkowych, na które składają się położenie i prędkość w wybranej chwili, na przykład na początku ruchu.

### ZADANIE 3.3

Rozwiąż równania Lagrange'a dla układu mechanicznego pokazanego na rysunku. Równia może przesuwać się bez tarcia po stole (tylko w płaszczyźnie rysunku), Walec, na który nawinięto nić, ślizga się po powierzchni równi bez tarcia a jego oś pozostaje prostopadła do powierzchni rysunku. Ciężarek może przesuwać się równoległe do pionowej krawędzi równi. Błoczek jest nieważki.



Wynik:

Wszystkie ruchy jednostajnie przyspieszone.

- pionowy ruch ciężarka (względem równi) z przyspieszeniem  $\frac{3}{8}g$  ;
- ruch środka walca wzdłuż równi z przyspieszeniem  $\frac{1}{4}g$  (względem równi);
- poziomy ruch równi z przyspieszeniem  $\frac{\sqrt{3}}{24}g$  (względem stołu).

### ZADANIE 3.4

Napisz funkcję Lagrange'a i równania ruchu dla punktu materialnego o masie  $m$ , poruszającego się bez tarcia po powierzchni pionowej paraboloidy obrotowej  $z = \alpha(x^2 + y^2)$ .

### ZADANIE 3.5

Prosty pręt przecinający oś „z” i tworzący z nią kąt  $\alpha$  wiruje wokół tej osi ze stałą, narzuconą prędkością kątową  $\omega$ . Po pręcie może ślizgać się bez tarcia punkt materialny. Określ liczbę stopni swobody, wybierz współrzędne uogólnione (współrzędną uogólnioną?) Znajdź funkcję Lagrange'a i napisz równania (równanie?) Lagrange'a.

Zauważ, że w przypadku, gdyby prędkość kątowna  $\omega$  zależała od czasu (w sposób narzucony z zewnątrz), w funkcji Lagrange'a również pojawiłaby się jawna zależność od czasu (por. przypis na stronie 16).

### ZADANIE 3.6

Stosując współrzędne sferyczne napisz równania Lagrange'a dla punktu materialnego poruszającego się w trzech wymiarach w polu sił centralnych (tzn. wszystkie wektory sił wskazują ten sam ustalony punkt w przestrzeni) o symetrii sferycznej  $|\vec{F}| = F(r)$ .

Rozwiązanie:

Sferycznie symetryczne pole sił centralnych jest zawsze potencjalne:  $F(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$ .

Obliczamy energię kinetyczną:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2(\sin^2 \vartheta)\dot{\varphi}^2).$$

W tym celu zapisaliśmy kwadrat szybkości punktu materialnego jako sumę kwadratów trzech składowych prędkości w trzech prostopadłych kierunkach: radialnym, „południkowym” i „równoleżnikowym”. Tak więc funkcja Lagrange’a i równania Lagrange’a mają postać:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2(\sin^2 \vartheta)\dot{\varphi}^2) - V(r),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r} = \frac{\partial L}{\partial r} = mr(\dot{\vartheta}^2 + (\sin^2 \vartheta)\dot{\varphi}^2) - \frac{dV}{dr}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) = m(2r\dot{r}\dot{\vartheta} + r^2\ddot{\vartheta}) = \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = mr^2(\sin \vartheta \cos \vartheta)\dot{\varphi}^2.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{dt}[mr^2(\sin^2 \vartheta)\dot{\varphi}] = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

Mamy tu trzy równania, których nie możemy rozwiązać do końca, nie znając funkcji  $V(r)$ . Zauważmy jednak, że w ostatnim równaniu nie obliczyliśmy pochodnej zupełnej po czasie. Przyczyna, dla której byłoby to bezcelowe, leży w zerowaniu się tej pochodnej, co jest skutkiem tego, że funkcja Lagrange’a nie zależy od zmiennej  $\varphi$ . Współrzędne uogólnione, od których funkcja Lagrange’a nie zależy, nazywamy **współzrędnymi cyklicznymi**. Jeżeli udaje się ustalić współzrędną cykliczną, to - jak widać na powyższym przykładzie - mamy ułatwioną drogę do rozwiązania równań ruchu: zamiast obliczać pochodną po czasie (co dałoby nam kolejne równanie różniczkowe drugiego rzędu) możemy od razu napisać równanie pierwszego rzędu

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const}$$

i nieznaną stałą traktować jako jedną z sześciu (w naszym przypadku) stałych, od których będzie zależało pełne rozwiązanie problemu.

Tak więc wykrycie zmiennej cyklicznej skraca procedurę rozwiązywania równań dynamicznych. Należy podkreślić, że obecność zmiennej cyklicznej ujawnia się tylko wtedy, jeżeli współzrędnne uogólnione właściwie dobierzemy do danego układu mechanicznego. Omawiany przypadek, rozważony na przykład we współzrędnnych kartezjańskich, doprowadziłby bowiem do funkcji Lagrange’a postaci

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

która nie ujawnia żadnej współrzędnej cyklicznej.

Na podstawie tego przykładu możemy wnosić, że, wybierając komplet współrzędnych uogólnionych, powinniśmy kierować się względami symetrii pola sił (i więzów, których w tym przykładzie zabrakło). Przestrzeganie tej zasady prawie zawsze ma korzystne skutki. Rozważymy jednak rzadki wyjątek:

#### ZADANIE 3.7

Punkt materialny o masie  $m$  porusza się w przestrzeni trójwymiarowej w polu centralnej przyciągającej siły sprężystej  $|\vec{F}| = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Mamy więc trójwymiarowy oscylator harmoniczny. Rozważ zagadnienie wyboru współrzędnych uogólnionych i rozwiązania równania ruchu.

Warto porównać przydatność współrzędnych kartezjańskich i współrzędnych sferycznych (które byłyby w tym przypadku sugerowane przez sferyczną symetrię funkcji potencjału).

#### IV. ZASADA NAJMNIEJSZEGO DZIAŁANIA

Mechanika Lagrange'a, którą właśnie poznajemy, pozwoliła na odkrycie pewnej prawidłowości, której zasięg wykracza daleko poza mechanikę. **Zasada najmniejszego działania**, bo o niej tu mowa, wydaje się być jedną z najzupełniej fundamentalnych zasad przyrody.

Definiujemy **działanie**  $S$  jako następującą całkę oznaczoną:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t)) dt.$$

Działanie jest zdefiniowane dla konkretnego ruchu, opisanego funkcjami  $\underline{q}(t)$ , trwającego od chwili  $t_1$  do chwili  $t_2$ . Działanie jest więc funkcjonałem ruchu.

Przypomnijmy, że funkcjonał jest odwzorowaniem, w którym „zmienną niezależną” jest funkcja lub rodzina funkcji (w naszym przypadku jest to  $s$  funkcji  $\underline{q}(t)$ ) a wartością odwzorowania jest liczba (w naszym przypadku - wartość całki oznaczonej z funkcji Lagrange'a, wykonanej po ustalonym przedziale czasu).

Wariacją działania  $\delta S$  nazwiemy zmianę wartości całki  $S$ , będącą skutkiem nieskończenie małej modyfikacji kompletu funkcji  $\underline{q}(t)$ :

$$q_i(t) \rightarrow q_i(t) + \delta q_i(t), \quad i = 1, \dots, s.$$

Tak więc po modyfikacji ruch odbywa się po nieco innej trajektorii i z nieco innymi prędkościami.

Przypomnijmy, że w przypadku funkcji jednej zmiennej  $f(x)$  przyrost funkcji pod wpływem nieskończenie małej zmiany wartości zmiennej niezależnej  $x$  od wartości  $x_0$  do wartości  $x_0 + \delta x$  wynosił (z dokładnością do nieskończenie małych rzędu nie niższego, niż dwa)

$$\delta f = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \delta x$$

i znikał (z tą samą dokładnością), jeżeli funkcja  $f(x)$  miała dla wartości  $x_0$  punkt stacjonarny. Podobnie możemy rozważyć „punkt” stacjonarny działania: byłby to taki komplet funkcji  $\underline{q}(t)$ , czyli taki ruch, którego dowolna nieskończenie mała modyfikacja, wyrażona przez komplet niezależnych funkcji czasu  $\delta q_1(t), \dots, \delta q_s(t)$ , nie powodowałaby zmiany działania (z dokładnością do nieskończenie małych rzędu nie niższego, niż dwa).

Załóżmy, że rozważamy taki zbiór funkcji  $\delta q_1(t), \dots, \delta q_s(t)$  modyfikujących ruch, które spełniają następujący dodatkowy warunek: wszystkie te modyfikacje nie zmieniają czasu ruchu i nie zmieniają położenia początkowego i końcowego. Tak więc porównujemy ze sobą wartości działania obliczone dla różnych ruchów (na ogół niezgodnych z równaniami Lagrange’a), które wszystkie zaczynają się w ustalonej chwili  $t_1$  w punkcie  $\underline{q}^{(1)}$  i kończą w ustalonej chwili  $t_2$  w punkcie  $\underline{q}^{(2)}$ . Możemy ten wymóg zapisać w postaci:

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, s$$

**TWIERDZENIE:**

**Ruch fizyczny, czyli zgodny z równaniami Lagrange’a, jest „punktem” stacjonarnym działania, czyli modyfikowanie tego ruchu, zgodne z regułą ustaloną wyżej, nie zmienia wartości działania (z dokładnością do nieskończenie małych rzędu nie niższego, niż dwa).**

Dowód:

Zakładamy, że ruch opisany funkcjami  $\underline{q}(t)$  jest fizyczny, czyli że

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\underline{q}, \dot{\underline{q}})}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(\underline{q}, \dot{\underline{q}})}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, \dots, s.$$

Obliczmy wariację działania wywołaną modyfikacją ruchu zgodną z ustalonymi warunkami

$$\delta \mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j \right) dt = \left| \begin{array}{l} \text{pierwszy składnik} \\ \text{całkujemy przez części} \end{array} \right|$$

$$= \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right) \delta q_j dt = 0.$$

Składnik „z podstawieniem” znika na mocy założenia o znikaniu wariacji  $\delta q_i$  na końcach przedziału całkowania, a całka znika na mocy równań Lagrange’a, które są spełnione przez funkcje  $\underline{q}(t)$

c.b.d.o.

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne: ze znikania wariacji  $\delta \mathcal{S}$  dla dowolnego zestawu wariacji  $\delta \underline{q}(t)$ , spełniających warunki  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, s$ , i będących poprawkami do określonego zestawu funkcji  $\underline{q}(t)$ , wynika, że funkcje te spełniają równania Lagrange’a.

Szkic dowodu jest następujący:

Należy rozważyć szczególny zestaw funkcji  $\delta \underline{q}(t)$ , w którym wszystkie funkcje znikają oprócz jednej (np.  $j$ -tej), różnej od zera tylko w jakiejś dowolnej chwili  $t' \in [t_1, t_2]$  i w dostatecznie małym otoczeniu tej chwili. Jeżeli założymy (zaprzeczając tezie), że wyrażenie  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}$  jest różne od zera w chwili  $t'$ , to z ciągłości tego wyrażenia względem czasu (którą zakładamy) wynika, że w pewnym otoczeniu chwili  $t'$  wyrażenie to musi mieć określony znak. Z tego już wynika, że potrafilibyśmy znaleźć takie otoczenie chwili  $t'$ , będące nośnikiem funkcji  $\delta q_j(t)$ <sup>9</sup>, dla którego całka

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^s \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \right) \delta q_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right) \delta q_j dt$$

byłaby, wbrew założeniu, różna od zera.

Udowodniliśmy więc równoważność równań Lagrange’a i zasady ekstremum działania<sup>10</sup> dla ruchu fizycznego w klasie ruchów  $\underline{q}(t)$ , spełniających warunek  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, s$ .

#### ZADANIE 4.1

Udowodnij, że jeżeli do funkcji Lagrange’a dodamy pochodną po czasie z dowolnej funkcji  $f[q(t)]$ ,

<sup>9</sup> Nośnikiem funkcji nazywamy ten obszar wartości zmiennej niezależnej, dla których funkcja jest różna od zera.

<sup>10</sup> Wbrew tradycyjnej nazwie („zasada najmniejszego działania”), nie musi to być minimum działania. Musi to jednak być punkt stacjonarny działania, gdzie przez „punkt” rozumiemy konkretny zestaw funkcji  $\underline{q}(t)$ . Tak więc określenie „zasada najmniejszego działania” niesie w zasadzie nieprawdziwą informację i pozostaje w użyciu tylko przez poszanowanie dla tradycji.

$$L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) \rightarrow L'(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) + \frac{d}{dt} f[q(t)]$$

to funkcja  $L'$ , używana tak, jak funkcja Lagrange'a  $L$ , prowadzi (za pośrednictwem równań Lagrange'a) do ruchu fizycznego.

Rozwiązanie:

Twierdzenie to udowodnimy korzystając z zasady ekstremum działania. Zmiana działania, związana z zamianą  $L \rightarrow L'$ , wynosi

$$S \rightarrow S' = S + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} f[q(t)] dt = S + f(t_2) - f(t_1).$$

Skoro więc dopuszczamy tylko wariacje ruchu spełniające  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$   $\forall i = 1, \dots, s$ , to liczby  $f(t_1)$  i  $f(t_2)$  nie podlegają wariacji, czyli ekstremum funkcjonału  $S'$  pociągnie za sobą ekstremum funkcjonału  $S$ ,

c.b.d.o.

Jako ćwiczenie warto powtórzyć dowód tego twierdzenia „w języku równań Lagrange'a”, czyli pokazać, że równania Lagrange'a z udziałem funkcji  $L'$  są równoważne równaniom Lagrange'a z wykorzystaniem funkcji  $L$ . Rachunek prowadzimy bezpośrednio, zaczynając od założenia, że funkcje  $\underline{q}(t)$  spełniają równania Lagrange'a z funkcją  $L'$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L'}{\partial q_k} = 0$$

i budując odpowiedni ciąg równoważności.

#### ZADANIE 4.2

Udowodnij, że ruch fizyczny w polu z potencjałem pozycyjnym (funkcja potencjału zależy tylko od  $\underline{q}(t)$  a nie zależy od  $\underline{\dot{q}}(t)$ ) nie może realizować maksimum działania w sensie poszukiwania ekstremum działania na opisanych wyżej warunkach.

Rozwiązanie.

Zakładamy, że potencjał jest ciągłą funkcją zmiennych  $\underline{q}$ . Rozważmy działanie

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} T(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) dt - \int_{t_1}^{t_2} V(\underline{q}) dt.$$

Pierwsza z tych całek jest z oczywistych powodów określona dodatnio (energia kinetyczna jest zawsze dodatnia).



Pokażemy, że dla każdego ruchu łączącego ustalone wcześniej punkty  $\underline{q}^{(1)}$  w chwili  $t_1$  i  $\underline{q}^{(2)}$  w chwili  $t_2$  możemy wskazać taką modyfikację ruchu, która, utrzymując drugą całkę na dowolnie mało zmienionym poziomie, pozwala na nieograniczony wzrost pierwszej całki. Modyfikacja ta polega na takim wydłużeniu toru, aby z jednej strony spowodowało to wzrost prędkości (dłuższy tor przy nie zmienionym czasie ruchu oznacza większą energię kinetyczną) a z drugiej możliwie mało zmieniło całkę drugą. Z ciągłości potencjału wynika, że ten drugi warunek będzie spełniony pod warunkiem, że poruszając się po nowym, dłuższym torze, cząstka będzie w każdej chwili dostatecznie blisko położenia, które w tej chwili zajmowała w ruchu wyjściowym. Tak więc w zależności od tego, jak bardzo zamierzamy wydłużyć tor cząstki, wystarczy tylko przestrzegać tego, aby tor ten był dostatecznie gęsto spleciony wokół odpowiednich punktów toru wyjściowego.

#### ZADANIE 4.3

Rozważ punkt materialny na sferze (bez sił zewnętrznych). Zadajemy dowolnie dwa punkty na sferze w roli punktów  $\underline{q}^{(1)}$  i  $\underline{q}^{(2)}$ . Zgodny z prawami mechaniki ruch między tymi punktami, który miałby być zrealizowany od zadanej chwili  $t_1$  do zadanej chwili  $t_2$ , musi odbywać się wzdłuż koła wielkiego. Tak więc widać, że jeżeli tylko obydwie wybrane punkty nie leżą na wspólnej średnicy, to są dwie istotnie różne możliwości zrealizowania ruchu fizycznego, po dwóch różniących się łukach koła wielkiego, łączących te punkty. Przedyskutuj tę sytuację z punktu widzenia zasady wariacyjnej.

Rozwiązanie:

Fizyczny ruch po krótszym łuku realizuje minimum działania  $\int_{t_1}^{t_2} T(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) dt$ . Jest to najkrótsza droga łącząca zadane punkty; każda deformacja tego toru wydłuża drogę (z konieczności – zwiększając prędkość, czyli zwiększając energię kinetyczną), a więc zwiększa też całkę  $\int_{t_1}^{t_2} T(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) dt$ . Z całką po dłuższym łuku sprawa wygląda podobnie, ale wartość uzyskanego tam działania jest już tylko minimum lokalnym.

#### V. PĘDY UOGÓLNIONE

Rozważmy określony układ mechaniczny, którego ruch może być opisany współrzędnymi uogólnionymi  $\underline{q}(t)$ . **Całką ruchu**  $f(\underline{q}, \dot{\underline{q}})$  tego układu nazywamy taką funkcję współrzędnych uogólnionych  $\underline{q}(t)$  i prędkości  $\dot{\underline{q}}(t)$ , której wartość jest stała podczas każdego, zgodnego z prawami fizyki, ruchu tego układu mechanicznego

$$f(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \text{const}.$$

W następnym rozdziale omówimy pożyteczne twierdzenie, które pomaga poszukiwać całek ruchu. Na razie zauważmy tylko, że odkrycie całki ruchu może być traktowane jako znalezienie równania różniczkowego pierwszego rzędu (tylko pierwszego, a nie drugiego) dla

poszukiwanych funkcji  $\underline{q}(t)$ . Jeżeli na przykład jedna ze współrzędnych, np.  $q_j$ , jest współrzędną cykliczną, to  $\frac{d}{dt} \left[ \frac{\delta L(\underline{q}, \dot{\underline{q}})}{\delta \dot{q}_j} \right] = \frac{\delta L(\underline{q}, \dot{\underline{q}})}{\delta q_j} = 0$  i wyrażenie  $\frac{\delta L(\underline{q}, \dot{\underline{q}})}{\delta \dot{q}_j}$  jest całką ruchu.

Tak więc zamiast różniczkować to wyrażenie po czasie, co dałoby równanie różniczkowe drugiego rzędu, pozostawiamy równanie pierwszego rzędu (por. zadanie 3.6).

Definiujemy  $s$  **pędów uogólnionych**  $\underline{p} = p_1, \dots, p_s$ :

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

Mówimy, że pęd  $p_j$  jest **kanonicznie sprzężony** ze współrzędną  $q_j$ . Tak więc pędy kanonicznie sprzężone ze współrzędnymi cyklicznymi są całkami ruchu.

#### ZADANIE 5.1

W zadaniu 3.6 znaleźliśmy całkę ruchu związaną ze współrzędną cykliczną  $\varphi$ . Jaki jest związek tej całki ruchu z wektorem momentu pędu obliczanym względem środka symetrii pola sił?

Wskazówka: W ujawnionej we wspomnianym zadaniu całce ruchu występuje wyrażenie  $mr^2(\sin^2 \vartheta)$ , które jest momentem bezwładności punktu materialnego, obliczonym względem osi  $z$ .

## VI. RÓWNANIA HAMILTONA

Równania Lagrange'a stanowią układ  $s$  równań różniczkowych zwyczajnych na  $s$  funkcji  $\underline{q}(t)$ . Pokażemy teraz, że układ ten można zastąpić równoważnym układem  $2s$  równań cząstkowych pierwszego rzędu na  $2s$  funkcji czasu: do kompletu funkcji  $q_1(t), \dots, q_s(t)$  dołączą pędy uogólnione:  $p_1(t), \dots, p_s(t)$ . Ten nowy układ równań nosi nazwę **równań Hamiltona** i ma postać:

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H(\underline{p}, \underline{q})}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, s$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(\underline{p}, \underline{q})}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, s,$$

gdzie złożona funkcja czasu  $H(\underline{p}(t), \underline{q}(t))$  zdefiniowana jest następująco:

$$H(\underline{p}, \underline{q}) = \underline{p}\underline{\dot{q}} - L = \underline{p}\underline{\dot{q}}(\underline{p}, \underline{q}) - L[\underline{\dot{q}}(\underline{p}, \underline{q}), \underline{q}]$$

i nosi nazwę **funkcji Hamiltona**.

Wyjaśnienia wymagają zależności funkcyjne  $\dot{q}_i = \dot{q}_i(\underline{p}, \underline{q})$ , ujawnione w ostatnich wzorach. Korzystamy tu ze wzorów definicyjnych dla pędów uogólnionych  $p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$ , które, po rozwikłaniu względem prędkości uogólnionych  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$ , pozwalają wyrazić te prędkości jako zależne od współrzędnych  $\underline{q}$  i pędów uogólnionych  $\underline{p}$ .

Należy oczywiście udowodnić, że komplet  $2s$  równań Hamiltona jest równoważny kompletowi równań Lagrange'a.

1. Równania Hamiltona wynikają z równań Lagrange'a.

Dowód:

Obliczamy<sup>11</sup>

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H(\underline{q}, \underline{p})}{\partial q_i} \right|_{\underline{p}, \underline{q} \setminus q_i} &= \left. \frac{\partial}{\partial q_i} [p\dot{q}(\underline{p}, \underline{q}) - L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}(\underline{p}, \underline{q}))] \right|_{\underline{p}, \underline{q} \setminus q_i} \\ &= \left. p \frac{\partial \dot{q}}{\partial q_i} \right|_{\underline{p}, \underline{q} \setminus q_i} - \left. \frac{\partial L}{\partial q_i} \right|_{\underline{\dot{q}}, \underline{q} \setminus q_i} - \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial q_i} \right|_{\underline{p}, \underline{q} \setminus q_i} = \left. p \frac{\partial \dot{q}}{\partial q_i} \right|_{\underline{p}, \underline{q} \setminus q_i} - \left. \frac{\partial L}{\partial q_i} \right|_{\underline{\dot{q}}, \underline{q} \setminus q_i} - \left. p \frac{\partial \dot{q}}{\partial q_i} \right|_{\underline{p}, \underline{q} \setminus q_i} \\ &= \left| \text{na mocy równań Lagrange'a} \right| = -\dot{p}_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H(\underline{q}, \underline{p})}{\partial p_i} \right|_{\underline{q}, \underline{p} \setminus p_i} &= \left. \frac{\partial}{\partial p_i} [p\dot{q}(\underline{p}, \underline{q}) - L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}(\underline{p}, \underline{q}))] \right|_{\underline{q}, \underline{p} \setminus p_i} \\ &= \dot{q}_i(\underline{p}, \underline{q}) + \left. p \frac{\partial \dot{q}}{\partial p_i} \right|_{\underline{q}, \underline{p} \setminus p_i} - \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial p_i} \right|_{\underline{q}, \underline{p} \setminus p_i} = \dot{q}_i(\underline{p}, \underline{q}) + \left. p \frac{\partial \dot{q}}{\partial p_i} \right|_{\underline{q}, \underline{p} \setminus p_i} - \left. p \frac{\partial \dot{q}}{\partial p_i} \right|_{\underline{q}, \underline{p} \setminus p_i} = \dot{q}_i \\ &\text{c.b.d.o.} \end{aligned}$$

<sup>11</sup> Dla uproszczenia zapisu przyjmujemy zasadę, że powtarzający się w iloczynie znak podkreślenia oznacza

sumowanie po wskaźnikach. Zgodnie z tą notacją mamy więc na przykład  $\underline{p}\underline{\dot{q}} \equiv \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i$

Zauważmy, że wyprowadzając drugi zespół równań (tych z prędkościami po prawej stronie) nie korzystamy już z równań Lagrange'a. Równania te można traktować jako równoważne rozważanym wyżej formułom  $\dot{q}_i = \dot{q}_i(\underline{p}, \underline{q})$ .

2. Równania Lagrange'a wynikają z równań Hamiltona.

Czytelnikowi pozostawiamy przeprowadzenie odpowiedniego dowodu (technika rachowania jest taka sama, jak w punkcie pierwszym).

#### ZADANIE 6.1

Oblicz pędy kanoniczne  $p_j = p_j(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$  i funkcję Hamiltona  $H(\underline{p}, \underline{q})$  dla następujących układów mechanicznych:

1. Swobodny punkt materialny.
2. Punkt materialny nie ograniczony więzami w dowolnym polu sił opisanym zwykłym potencjałem  $V(\vec{x})$  (proszę użyć współrzędnych kartezjańskich).
3. Punkt materialny nie ograniczony więzami w polu centralnym o symetrii sferycznej (użyj współrzędnych sferycznych). Por. zadanie 3.6.
4. Naładowany punkt materialny poruszający się bez więzów w polu elektromagnetycznym opisanym potencjałem uogólnionym  $U(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = q(\varphi(\vec{x}, t) - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t))$ .

Warto przypomnieć sobie zadanie 3.2.

Wyniki:  $\vec{p} = m\dot{\vec{x}} + q\vec{A}$ ,  $H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\varphi$

5. Punkt materialny poruszający się wzdłuż prostej, przecinającej się z osią „z” pod stałym kątem, i wirującej wokół tej osi ze stałą zadaną prędkością kątową  $\omega$  (więzy reonomiczne).

W punktach 1-4 ostatniego zadania mieliśmy do czynienia z obiektami bez więzów albo z więzami skleronomicznymi. We wszystkich tych przypadkach funkcja Hamiltona okazała się tożsama ze znaną ze szkolnej fizyki energią mechaniczną  $E = T + V$ . Punkt 5 wyłamuje się z tej zasady: funkcja Hamiltona nie pokrywa się tam z energią (przyczyną jest reonomiczność więzów).



Wyżej udowodniliśmy równoważność równań Lagrange'a i równań Hamiltona. Pomimo tej formalnej równoważności warto jednak pamiętać o istotnej różnicy metodycznej, jaką wykazują obydwa formalizmy. Różnica ta sprawia, że formalizm Hamiltona jest w pewnym sensie podporządkowany formalizmowi Lagrange'a. Aby wskazać tę różnicę wróćmy do uwagi poczynionej wcześniej, zgodnie z którą połowa równań Hamiltona równoważna jest informacji o związkach  $\dot{q}_i = \dot{q}_i(\underline{p}, \underline{q})$ , czyli - po rozwikłaniu - o związkach  $p_i = p_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$ , i sprawdźmy, czy da się zastosować formalizm Hamiltona do dowolnego układu

mechanicznego, bez wcześniejszego odwoływania się do formalizmu Lagrange'a zbudowanego dla tego układu.

Należałoby więc zacząć od wypisania funkcji Hamiltona. Zauważmy, że jeżeli pominiemy formalizm Lagrange'a, to nie wiemy, w jaki sposób pędy kanoniczne wyrażają się przez współrzędne uogólnione i prędkości uogólnione (czyli - innymi słowy - nie znamy przepisu na mierzenie pędów), a zatem nie wiemy, jak prędkości  $\dot{q}$  wyrażają się przez współrzędne i pędy. Ta wiedza jest nam jednak potrzebna, jeżeli chcemy skorzystać z definicji Hamiltonianu  $H(\underline{p}, \underline{q}) = \underline{p}\dot{\underline{q}}(\underline{p}, \underline{q}) - L[\dot{\underline{q}}(\underline{p}, \underline{q}), \underline{q}]$ . Tak więc, chcąc uprawiać formalizm Hamiltona jako autonomiczne narzędzie do rozwiązywania problemów z mechaniki, musielibyśmy dla każdego układu mechanicznego znać funkcję Hamiltona niejako „z objawienia”. W praktyce zaś wyliczamy ją na podstawie wspomnianej definicji, czyli zakładamy nie tylko wcześniejszą znajomość funkcji Lagrange'a, ale też wywiedzionych z tej funkcji zależności  $\dot{q}_i = \dot{q}_i(\underline{p}, \underline{q})$ , będących treścią połowy równań Hamiltona.

## VII. TWIERDZENIE NOETHER

Rozważamy układ mechaniczny opisany kompletem współrzędnych uogólnionych  $q_1, q_2, \dots, q_s$ .

Niech komplet funkcji  $q_i(t)$  ( $i = 1 \dots s$ ) opisuje pewien ruch tego układu, odbywający się zgodnie z prawami fizyki (czyli funkcje  $q_i(t)$  spełniają równania ruchu). Rozważamy nieco inny (niekoniecznie fizyczny) ruch tego samego układu, zadany następującymi wzorami:

$$q'_i(t') = q_i(t) + \varepsilon \Psi_i(q, t), \quad t' = t + \varepsilon X(q, t).$$

Czasy  $t$  i  $t'$  mierzone są tym samym zegarem, wartości współrzędnych  $q'$  odczytywane są względem tego samego układu odniesienia, co wartości współrzędnych  $q$  a parametr  $\varepsilon$  jest nieskończenie mały. Funkcje  $\Psi_i(q, t)$  i  $X(q, t)$  nazywamy **generatorami** rozważanej transformacji.

Powyższe wzory transformacyjne należy rozumieć następująco:

Zaczynamy od wartości początkowych zmiennych przestrzennych  $\underline{q}$  i czasu  $t$  odpowiadających ruchowi fizycznemu  $\underline{q}(t)$ . Podstawiając je do powyższych wzorów dowiadujemy się gdzie i kiedy zaczyna się ruch zmieniony. Podstawiając do tych samych wzorów dalsze, bieżące wartości współrzędnych  $\underline{q}$  i czasu  $t$ , wyliczymy odpowiednie nowe położenia i chwile, w których te położenia będą osiągnięte w ruchu zmienionym. Należy podkreślić, że ruch zmieniony na ogół nie może się odbyć „o własnych siłach”, bo jest niefizyczny (czyli funkcje  $q'_i(t')$  nie spełniają równań ruchu), tak więc dla realizacji tego ruchu na ogół konieczna byłaby ingerencja z zewnątrz.

Zmieniony ruch da oczywiście na ogół inną wartość działania. Interesują nas jednak przypadki, gdy działanie nie zmieni się pomimo zmiany ruchu — a dokładniej — gdy zmieni się o wyrażenie proporcjonalne do potęgi epsilon nie niższej, niż  $\varepsilon^2$  (czyli gdy ta część zmiany działania, która jest proporcjonalna do  $\varepsilon$ , znika).

**Twierdzenie Noether** wiąże ze sobą ew. niezmienniczość działania, pod wpływem rozważonej transformacji, z konkretnym wyrażeniem, będącym „funkcją ruchu”, czyli

$R(q(t), \dot{q}(t), t)$ , które to wyrażenie jest w takim przypadku stałe podczas ruchu fizycznego (a więc jest całką ruchu):

$$R = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\Psi_i - \dot{q}_i X) + LX = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (\underline{\Psi} - \dot{q} X) + LX$$

Twierdzenie Neother mówi, że **jeżeli zmiana działania pod wpływem transformacji  $q \rightarrow q'$ ,  $t \rightarrow t'$  jest wielkością nieskończenie małą rzędu  $\varepsilon^2$  lub wyższego (a więc nie rzędu  $\varepsilon$ ), to  $R$  jest całką ruchu podczas ruchu fizycznego.**

Dowód:

Obliczamy pochodną funkcji  $R$  po czasie (z zamiarem udowodnienia, że ta pochodna znika):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (\underline{\Psi} - \dot{q} X) + LX \right] \\ &= \underline{\Psi} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\underline{\Psi}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} X - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} X - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \dot{X} + \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} X + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} X + L\dot{X} + \frac{\partial L}{\partial t} X = \dots \end{aligned}$$

korzystamy z tego, że ruch  $q(t)$  jest ruchem fizycznym, czyli  
 że każda funkcja  $q_i(t)$  spełnia równanie  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$

$$\dots = \frac{\partial L}{\partial q} \underline{\Psi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\underline{\Psi}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \dot{X} + L\dot{X} + \frac{\partial L}{\partial t} X.$$

Wynik tego rachunku odkładamy na chwilę na bok i wracamy do porównywania działań obliczonych dla ruchu fizycznego i ruchu zmienionego. Obliczamy różnicę tych działań:

$$\int_{t_1'}^{t_2'} L(\underline{q}', \dot{\underline{q}}', t') dt' - \int_{t_1}^{t_2} L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) dt = \dots$$

(w pierwszej całce przechodzimy od zmiennej  $t'$  do  $t$ :  $dt' = \frac{dt'}{dt} dt = (1 + \varepsilon \dot{X}) dt$ )

$$\dots = \int_{t_1}^{t_2} [L(\underline{q}', \dot{\underline{q}}', t') (1 + \varepsilon \dot{X}) - L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)] dt \dots$$

Osobno obliczamy  $L(\underline{q}', \underline{q}', t')$  (pomijamy przy tym człony rzędu  $\varepsilon^2$  i wyższego):

$$\begin{aligned} L(\underline{q}', \underline{q}', t') &= L(\underline{q}, \underline{q}, t) + \frac{\partial L}{\partial \underline{q}}(\underline{q}' - \underline{q}) + \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{q}}}(\underline{\dot{q}}' - \underline{\dot{q}}) + \frac{\partial L}{\partial t}(t' - t) + 0(\varepsilon^2) \\ &= L(\underline{q}, \underline{q}, t) + \frac{\partial L}{\partial \underline{q}} \varepsilon \underline{\Psi} + \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{q}}} \varepsilon (\underline{\dot{\Psi}} - \underline{\dot{q}} \underline{\dot{X}}) + \frac{\partial L}{\partial t} X \varepsilon \end{aligned}$$

bo  $\underline{\dot{q}}' = \frac{d\underline{q}'}{dt'} = \frac{d\underline{q}'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{\underline{\dot{q}} + \varepsilon \underline{\dot{\Psi}}}{1 + \varepsilon \underline{\dot{X}}} = (\underline{\dot{q}} + \varepsilon \underline{\dot{\Psi}})(1 - \varepsilon \underline{\dot{X}} + 0(\varepsilon^2)) = \underline{\dot{q}} + \varepsilon (\underline{\dot{\Psi}} - \underline{\dot{q}} \underline{\dot{X}}) + 0(\varepsilon^2).$

$$\begin{aligned} \dots &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[ L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) + \frac{\partial L}{\partial \underline{q}} \varepsilon \underline{\Psi} + \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{q}}} \varepsilon (\underline{\dot{\Psi}} - \underline{\dot{q}} \underline{\dot{X}}) + \frac{\partial L}{\partial t} X \varepsilon \right] (1 + \varepsilon \underline{\dot{X}}) - L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \right\} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \left[ \frac{\partial L}{\partial \underline{q}} \underline{\Psi} + \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{q}}} (\underline{\dot{\Psi}} - \underline{\dot{q}} \underline{\dot{X}}) + \frac{\partial L}{\partial t} X + L \underline{\dot{X}} \right] dt + 0(\varepsilon^2) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{q}}} (\underline{\Psi} - \underline{\dot{q}} X) + L X \right] dt + 0(\varepsilon^2) = (\text{z założenia}) = 0(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

czyli

$$\left[ \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{q}}} (\underline{\Psi} - \underline{\dot{q}} X) + L X \right] \Big|_{t=t_2} = \left[ \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{q}}} (\underline{\Psi} - \underline{\dot{q}} X) + L X \right] \Big|_{t=t_1}.$$

Chwila  $t_2$  jest tu wybrana najzupełniej dowolnie, tak więc w dowolnej chwili, wybranej podczas ruchu, wartość wyrażenia  $\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{q}}} (\underline{\Psi} - \underline{\dot{q}} X) + L X$  będzie taka, jak w chwili początkowej  $t_1$ ,

c.b.d.o.

Warto przyjrzeć się wynikającym z twierdzenia Noether całkom ruchu, związanym z niezmienniczością działania względem następujących transformacji:

1. Translacja przestrzenna w kierunku jednej ze zmiennych

$q_i' = q_i + \varepsilon$ , pozostałe zmienne przestrzenne nie podlegają transformacji,  $t' = t$  (czyli  $\Psi_i = 1$ , pozostałe generatory  $\Psi$  wynoszą zero,  $X = 0$ )

— tu całką ruchu okazuje się być pęd kanonicznie sprzężony z tą zmienną  $q_i$ , „w kierunku której przesuujemy trajektorię”. W zasadzie omówiliśmy już to zagadnienie wcześniej, gdy stwierdziliśmy, że pęd kanonicznie sprzężony ze współrzędną cykliczną jest całką ruchu.

2. Obrót w zwykłych trzech wymiarach (współzrędnymi uogólnionymi są współrzędne sferyczne a transformacja polega na nieskończenie małym obrocie wokół osi „z”, którą ustawiamy wzdłuż osi zamierzonego obrotu, czyli  $\varphi' = \varphi + \varepsilon$ ). Całką ruchu jest składowa z-owa momentu pędu. Zauważmy, że jest to szczególny przypadek punktu „1”.
3. Przesunięcie czasu o  $\varepsilon$  (oznacza to wykonanie całego ruchu w taki sam sposób, ale o czas  $\varepsilon$  później) — całką ruchu jest funkcja Hamiltona.

Oczywiście stwierdzenia ujęte w punktach 1-3 wymagają sprawdzenia, co zalecamy Czytelnikowi. Nie należy też zapominać o tym, że wymienione transformacje mogą nie być (i na ogół nie są) transformacjami symetrii dla danego układu fizycznego. Jeżeli układ nie wykazuje symetrii translacyjnej (pkt 1) czy obrotowej (pkt 2), to odpowiednie pędy kanoniczne nie są całkami ruchu. Jeżeli z kolei pole sił zależy jawnie od czasu (potencjał zależy jawnie od czasu), to przesunięcie ruchu w czasie również powoduje zmianę działania a funkcja Hamiltona nie jest całką ruchu.

#### ZADANIE 7.1

Uogólnij twierdzenie Noether na przypadek, gdy pod wpływem transformacji, wyznaczonej generatorami  $\underline{\Psi}(q, t)$  i  $X(q, t)$ , całka działania zmienia się co prawda o wielkość rzędu  $\varepsilon$ , ale zmiana ta wyraża się tylko przez wartości współrzędnych na początku i na końcu ruchu na zasadzie ujętej następującym związkem:

$$\delta S = \int_{t_1'}^{t_2'} L(\underline{q}', \underline{\dot{q}}', t') dt' - \int_{t_1}^{t_2} L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) dt = \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} f(\underline{q}, t) dt + O(\varepsilon^2).$$

Zadanie polega na udowodnieniu, że całka ruchu, której istnienie wynika z opisanych tu okoliczności, ma postać  $\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{q}}}(\underline{\Psi} - \underline{\dot{q}}X) + LX - f$ .

#### ZADANIE 7.2

W zadaniu 6.1 obliczaliśmy funkcję Hamiltona dla punktu materialnego poruszającego się wzdłuż prostej przecinającej się z osią „z”, nachylonej do niej pod ustalonym kątem  $\alpha$  i obracającej się wokół tej osi z zadaną stałą prędkością kątową. Stwierdziliśmy tam, że funkcja ta nie pokrywa się z energią mechaniczną punktu materialnego. Skonfrontuj ten wynik z całką ruchu związaną z symetrią układu względem translacji w czasie (punkt 3 ostatniego wyliczenia).



## VIII. PRZESTRZEŃ FAZOWA

Wiemy już, że konsekwentnie uprawiany formalizm Hamiltona polega na następującym (przyjmujemy, że funkcja Lagrange'a nie zależy jawnie od czasu):

1. Punktem wyjścia jest funkcja Hamiltona  $H(\underline{p}(t), \underline{q}(t))$  będąca złożoną funkcją czasu („złożoną”, bo za pośrednictwem  $2s$  nieznanymi funkcji  $p_1(t), \dots, q_s(t)$ ). Zakładamy, że znamy funkcję Hamiltona danego układu, co w praktyce - jak już wiemy - może oznaczać konieczność wcześniejszego odwołania się do formalizmu Lagrange'a.

2. Rozwiązania równań Hamiltona, jako równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu, otrzymujemy jako zależne od  $2s$  stałych, które to stałe możemy zidentyfikować z początkowymi (czyli odnoszącymi się do pewnej chwili  $t_0$ ) wartościami funkcji  $p_1(t), \dots, q_s(t)$ .

Funkcje  $p_1(t), \dots, q_s(t)$  nazywamy **współrzędnymi fazowymi** danego układu mechanicznego a  $2s$ -wymiarową przestrzeń sparametryzowaną współrzędnymi  $p_1, \dots, q_s$  nazywamy **przestrzenią fazową** tego układu. Ruch układu opisany jest linią w przestrzeni fazowej (trajekcją w przestrzeni fazowej). Zadanie punktu w przestrzeni fazowej możemy traktować jako zadanie pewnych warunków początkowych; równania Hamiltona jednoznacznie wyprowadzają z tego punktu „trajektorię”. Zauważmy, że ta krzywa w przestrzeni fazowej, odpowiadająca ruchowi fizycznemu, nie wymaga osobnego sparametryzowania jej przez czas: znając pędy  $\underline{p}$  i położenia  $\underline{q}$  znamy prędkości  $\underline{\dot{q}}$ , czyli wiemy w jaki sposób punkt przesuwa się wzdłuż trajektorii fazowej, gdy czas płynie.

### ZADANIE 8.1

Udowodnij, że trajektoria w przestrzeni fazowej nie może przecinać samej siebie.

## IX. UOGÓLNIONA ZASADA WARIACYJNA

Wiemy już, że prawa mechaniki są równoważne zasadzie najmniejszego działania, co udowodniliśmy w przestrzeni konfiguracyjnej w ramach formalizmu Lagrange'a. Zachodzi pytanie, czy w przestrzeni fazowej obowiązuje podobna zasada.

Przypomnijmy reguły, na jakich zasada najmniejszego działania funkcjonowała w przestrzeni konfiguracyjnej, sparametryzowanej zmiennymi  $q_1, \dots, q_s$ . Zadawaliśmy tam dowolnie dwa punkty (początkowy i końcowy) trajektorii, przypisując im ustalone dwie chwile czasu, i szukaliśmy sparametryzowanej czasem linii łączącej te dwa punkty i takiej, aby działanie, będące funkcjonalem zbioru funkcji  $q_1(t), \dots, q_s(t)$ , znalazło na tej trajektorii swój „punkt” stacjonarny.

Nietrudno zrozumieć, że w przestrzeni fazowej podobna próba jest skazana na niepowodzenie. Wynika to z tego, że zadanie jednego punktu w tej przestrzeni wyznacza całą

trajektorię fizyczną wychodzącą z tego punktu<sup>12</sup>, tak więc dowolnie wybrane dwa punkty w przestrzeni fazowej na ogół nie leżą na wspólnej trajektorii fizycznej.

Spróbujmy więc przełożyć zasadę wariacyjną, ustaloną wcześniej w przestrzeni konfiguracyjnej, na odpowiednią procedurę obowiązującą w przestrzeni fazowej. W tym celu przypomnijmy, że wariację działania, wynikającą z nieznaczonej zmiany ruchu, wprowadzonej między ustalonymi punktami  $q_1(t_1), \dots, q_s(t_1)$  oraz  $q_1(t_2), \dots, q_s(t_2)$ , ujęliśmy w postaci:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) dt,$$

co możemy teraz zapisać w zmiennych fazowych:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \delta(\underline{p}\underline{\dot{q}} - H) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \underline{\dot{q}}\delta\underline{p} + \underline{p}\delta\underline{\dot{q}} - \frac{\partial H}{\partial \underline{q}}\delta\underline{q} - \frac{\partial H}{\partial \underline{p}}\delta\underline{p} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( \underline{\dot{q}} - \frac{\partial H}{\partial \underline{p}} \right) \delta\underline{p} - \left( \underline{\dot{p}} + \frac{\partial H}{\partial \underline{q}} \right) \delta\underline{q} \right] dt + \underline{p}\delta\underline{q} \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( \underline{\dot{q}} - \frac{\partial H}{\partial \underline{p}} \right) \delta\underline{p} - \left( \underline{\dot{p}} + \frac{\partial H}{\partial \underline{q}} \right) \delta\underline{q} \right] dt \end{aligned}$$

Na podstawie wyprowadzonych wyżej równań Hamiltona stwierdzamy więc powtórnie, że wariacja działania, będąca skutkiem dowolnych wariacji  $\delta\underline{q}(t)$ , spełniających warunki  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \quad \forall i$  i zrealizowanych na funkcjach  $\underline{q}(t)$  opisujących ruch fizyczny, znika<sup>13</sup>. Ten wynik nie zaskakuje.

Należy pamiętać, że na razie wariacje pędów  $\delta\underline{p}(t)$  są funkcjami w pełni wyznaczonymi przez wariacje  $\delta\underline{q}(t)$ , ponieważ funkcje  $\underline{p}(t)$  są jednoznacznie wyznaczone przez funkcje  $\underline{q}(t)$ .

Możemy teraz dokonać pewnego uogólnienia. Definiujemy nowy funkcjonal  $S[\underline{q}(t), \underline{p}(t)]$ , który zwyczajowo również nazwiemy działaniem. Funkcjonał ten określony jest na niezależnych od siebie funkcjach  $\underline{q}(t)$  i  $\underline{p}(t)$  wzorem

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (\underline{p}\underline{\dot{q}} - H(\underline{p}, \underline{q})) dt$$

<sup>12</sup> Przez „trajektorię w przestrzeni fazowej” rozumiemy określoną krzywą w 2s-wymiarowej przestrzeni  $(\underline{p}, \underline{q})$ , w określony sposób sparametryzowaną parametrem  $t$ .

<sup>13</sup> Zauważmy, że dla znikania rozważanej wariacji warunek  $\delta p_i(t_1) = \delta p_i(t_2) = 0$  nie jest konieczny

i dla funkcji  $\underline{p}(t)$ , związanych w zwykły sposób z funkcjami  $\underline{q}(t)$ , pokrywa się z działaniem fizycznym  $S[\underline{q}(t)]$ . Na podstawie przedstawionego wyżej rachunku możemy na temat funkcyjonału  $S[\underline{q}(t), \underline{p}(t)]$  wypowiedzieć następujące twierdzenie:

Ruch fizyczny, opisany w przestrzeni fazowej funkcjami  $\underline{q}(t)$ ,  $\underline{p}(t)$ , jest „punktem stacjonarnym” działania  $S[\underline{q}(t), \underline{p}(t)]$  w klasie niezależnych wariacji  $\delta \underline{p}(t)$ ,  $\delta \underline{q}(t)$  spełniających warunek  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \quad \forall i$ .<sup>14</sup>

Jak widać, tak sformułowane twierdzenie traktuje funkcje  $\underline{q}(t)$  i  $\underline{p}(t)$  w sposób niesymetryczny. Twierdzenie to pozostanie jednak prawdziwe, jeżeli na dowolne wariacje funkcji  $\underline{p}(t)$  nałożymy warunek  $\delta p_i(t_1) = \delta p_i(t_2) = 0 \quad \forall i$ .

Podsumujmy więc. Pokazaliśmy, że równania Hamiltona równoważne są uogólnionej zasadzie wariacyjnej: jeżeli dla dwóch dowolnie wybranych punktów w przestrzeni fazowej istnieje taka łącząca te punkty trajektoria fazowa opisana niezależnymi funkcjami  $\underline{q}(t)$  i  $\underline{p}(t)$ , która jest „punktem” stacjonarnym uogólnionego funkcyjonału działania  $S[\underline{q}(t), \underline{p}(t)]$  przy warunkach  $\delta \underline{q}(t_1) = \delta \underline{q}(t_2) = 0$ ,  $\delta \underline{p}(t_1) = \delta \underline{p}(t_2) = 0$ , to trajektoria ta spełnia równania Hamiltona, czyli opisuje ruch fizyczny. I na odwrót: każda trajektoria fizyczna w przestrzeni fazowej, a więc taka, dla której znikają wyrażenia  $\left( \dot{\underline{q}} - \frac{\partial H}{\partial \underline{p}} \right)$  oraz  $\left( \dot{\underline{p}} + \frac{\partial H}{\partial \underline{q}} \right)$ , jest „punktem” stacjonarnym uogólnionego działania dla dowolnych dwóch punktów tej trajektorii traktowanych jako punkty  $\underline{q}(t_1)$ ,  $\underline{p}(t_1)$ ,  $\underline{q}(t_2)$ ,  $\underline{p}(t_2)$ .

#### ZADANIE 9.1

1. Rozważmy układ mechaniczny opisany niezależną jawnie od czasu funkcją Hamiltona  $H(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)$ . Załóżmy, że ma ona tę szczególną własność, że można ją zapisać w postaci  $H = H[f(q_1, \dots, q_k, p_1, \dots, p_k), q_{k+1}, \dots, q_s, p_{k+1}, \dots, p_s]$ . Korzystając z równań Hamiltona udowodnij, że w takim przypadku wielkość  $f(q_1, \dots, q_k, p_1, \dots, p_k)$  jest całką ruchu.

2. Udowodnij, że jeżeli funkcja Hamiltona ma postać

$$H = H\left\{ f_1\left[ f_2(q_1, \dots, q_j, p_1, \dots, p_j), q_{j+1}, \dots, q_k, p_{j+1}, \dots, p_k \right], q_{k+1}, \dots, q_s, p_{k+1}, \dots, p_s \right\}$$

to zarówno funkcja  $f_2$  jak i funkcja  $f_1$  są całkami ruchu.

<sup>14</sup> Warto pamiętać, że skoro funkcje  $\underline{p}(t)$  i  $\underline{q}(t)$  traktujemy jako niezależne argumenty funkcyjonału  $S[\underline{q}(t), \underline{p}(t)]$ , to interpretacja fizyczna funkcji  $\underline{p}(t)$  jako pędów fizycznych staje się w tym kontekście nieaktualna.

### ZADANIE 9.2

Pokaż, że jeżeli funkcja Hamiltona nie jest jawnie zależna od czasu, to jest całką ruchu. Porównaj z poprzednim zadaniem.

### ZADANIE 9.3

Rozważmy ruch opisany w przestrzeni fazowej, w którym funkcja Hamiltona jest całką ruchu. Niech podczas tego ruchu jedna ze zmiennych konfiguracyjnych zależy monotonicznie od czasu. Dla odróżnienia od pozostałych zmiennych konfiguracyjnych oznaczmy ją symbolem  $\xi$  przy czym  $\frac{d\xi}{dt} \neq 0$  podczas ruchu. Tak więc komplet zmiennych konfiguracyjnych oznaczmy symbolami  $(\underline{q}, \xi)$ . Podobnie komplet zmiennych pędowych oznaczmy – odpowiednio –  $(\underline{p}, \pi)$ .

Wyruguj czas z równań Hamiltona, wypisanych dla tego kompletu zmiennych fazowych, tak, aby zmienna  $\xi$  przejęła rolę parametru ewolucji. Wskaż nową funkcję Hamiltona i pokaż, że otrzymujemy w ten sposób nowy układ równań Hamiltona, tym razem dla zmiennych  $(\underline{p}, \underline{q})$ , w którym pochodną po czasie zastępuje pochodna po zmiennej  $\xi$ .

Rozwiązanie:

Wypiszmy równania Hamiltona dla wyjściowej przestrzeni fazowej, w której za ewolucję czasową odpowiada funkcja Hamiltona  $H(\underline{p}, \pi, \underline{q}, \xi)$ :

$$\frac{d\underline{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \underline{p}}, \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \pi},$$

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \underline{q}}, \quad \frac{d\pi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi}.$$

Rozwiązaniami tych równań są funkcje

$$\begin{aligned} \underline{q} &= \underline{q}(t), & \xi &= \xi(t), \\ \underline{p} &= \underline{p}(t), & \pi &= \pi(t). \end{aligned}$$

Równania Hamiltona dla zmiennych  $\underline{p}, \underline{q}$  przepiszemy w postaci

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \Bigg|_{\underline{q}, \xi, \underline{p} \setminus p_i, \pi} \quad \dot{p}_i = \frac{dp_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \Bigg|_{\underline{q} \setminus q_i, \xi, \underline{p}, \pi}$$

czyli

$$\frac{dq_i}{d\xi} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \bigg|_{\underline{q}, \underline{\xi}, \underline{p} \setminus p_i, \pi} \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^{-1} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \bigg|_{\underline{q}, \underline{\xi}, \underline{p} \setminus p_i, \pi} \left( \frac{\partial H}{\partial \pi} \bigg|_{\underline{q}, \underline{\xi}, \underline{p}} \right)^{-1}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\frac{dp_i}{d\xi} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \bigg|_{\underline{q} \setminus q_i, \underline{\xi}, \underline{p}, \pi} \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^{-1} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \bigg|_{\underline{q} \setminus q_i, \underline{\xi}, \underline{p}, \pi} \left( \frac{\partial H}{\partial \pi} \bigg|_{\underline{q}, \underline{\xi}, \underline{p}} \right)^{-1}, \quad i = 1, \dots, n$$

Założyliśmy, że funkcja Hamiltona jest całką ruchu, czyli

$$H(\underline{q}, \underline{\xi}, \underline{p}, \pi) = \text{const} = E,$$

gdzie wartość stałej  $E$  wyznaczona jest przez warunki początkowe danego ruchu. Oznacza to, że trajektoria, wykreślona w przestrzeni fazowej, znajduje się na  $2s-1$  wymiarowej hiperpowierzchni, wyznaczonej przez wartość stałej  $E$ . Załóżmy, że możliwe jest przekształcenie równania tej hiperpowierzchni do postaci

$$\pi = \pi(E, \underline{q}, \underline{\xi}, \underline{p}).$$

Wybermy wartość wskaźnika  $i$ . Rozważmy nieskończenie małe przesunięcie  $(dp_i, d\pi)$ , wykonane wzdłuż tej hiperpowierzchni. Przyrosty  $(dp_i, d\pi)$  powinny więc spełniać związek:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} \bigg|_{\underline{q}, \underline{\xi}, \underline{p} \setminus p_i, \pi} dp_i + \frac{\partial H}{\partial \pi} \bigg|_{\underline{q}, \underline{\xi}, \underline{p}} d\pi = 0,$$

czyli

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} \bigg|_{\underline{q}, \underline{\xi}, \underline{p} \setminus p_i, \pi} = -\frac{\partial H}{\partial \pi} \bigg|_{\underline{q}, \underline{\xi}, \underline{p}} \frac{d\pi}{dp_i},$$

gdzie stosunek różniczek  $\frac{d\pi}{dp_i}$ , zapisany jako pochodna, przyjmie postać

$$\frac{d\pi}{dp_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \pi(E, \underline{q}, \underline{\xi}, \underline{p}) \bigg|_{E, \underline{q}, \underline{\xi}, \underline{p} \setminus p_i}.$$

Otrzymane wyniki możemy teraz podstawić do „pierwszej połowy” równań Hamiltona, co prowadzi do równań

$$\frac{dq_i}{d\xi} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \bigg|_{\underline{q}, \underline{\xi}, \underline{p} \setminus p_i, \pi} \left( \frac{\partial H}{\partial \pi} \bigg|_{\underline{q}, \underline{\xi}, \underline{p}} \right)^{-1} = \frac{\partial}{\partial p_i} [-\pi(E, \underline{q}, \underline{\xi}, \underline{p})].$$

Rozważając w taki sam sposób parę różniczek  $(dq_i, d\pi)$  przekształcimy pozostałe równania Hamiltona do postaci

$$\frac{dp_i}{d\xi} = -\frac{\partial}{\partial q_i} [-\pi(E, \underline{q}, \underline{\xi}, \underline{p})].$$

Rozwiązaniem tego układu równań, w którym czas już nie występuje (jego rolę przejął parametr  $\xi$ ), są między innymi funkcje  $\underline{q} = \underline{q}(\xi)$  opisujące tor układu w przestrzeni konfiguracyjnej. Tak więc pierwotny parametr ewolucji  $t$  został zredukowany na rzecz wybranej zmiennej konfiguracyjnej  $\xi$ . Zauważmy też, że rolę funkcji Hamiltona dla zredukowanego opisu przejął (wzięty ze znakiem minus) pęd kanonicznie sprzężony ze zmienną  $\xi$ .

Procedura redukcji może być kontynuowana w przypadku, gdy zmienna  $\pi$  jest całką ruchu. Pozostając w klasie ruchów o danej energii możemy z kolei spośród nich wybrać podklasę ruchów o danej wartości funkcji  $\pi$ , wskazać kolejną zmienną konfiguracyjną, monotonicznie zależną od aktualnego parametru ewolucji  $\xi$  i na jej rzecz wyredukować ten parametr. Przedmiotem otrzymanego w ten sposób opisu będzie rzut trajektorii na odpowiednią podprzestrzeń przestrzeni konfiguracyjnej.

Śledząc procedurę wyłaniania nowej funkcji Hamiltona, towarzyszącą każdej redukcji, łatwo zauważyć, że każdorazowo wprowadza ona do aktualnej funkcji Hamiltona nową stałą (w opisanym wyżej przypadku była to najpierw stała  $E$  a po niej  $\pi$ ).

W związku z tym warto zauważyć, że nie mamy podstaw do uznania za pewnik, iż opis z użyciem czasu  $t$ , jako parametru ewolucji, jest opisem najdoskonalszym. Nie sposób wykluczyć, że opis ten jest już owocem nieznanych redukcji, jakich bezwiednie dokonujemy uprawiając fizykę w czterowymiarowej czasoprzestrzeni. Śladem po tych redukcjach mogłyby być stałe obecne w tradycyjnych funkcjach Hamiltona, takie jak masy obiektów i stałe sprzężenia.

#### ZADANIE 9.4

Zilustruj schemat opisany w poprzednim zadaniu, dokonując redukcji opisu dla prostego układu mechanicznego, na przykład omawianego w szkole rzutu ukośnego w jednorodnym polu grawitacyjnym.

Rozwiązanie:

W roli współrzędnych uogólnionych wybieramy kartezjańskie współrzędne punktu materialnego (oś  $x$  niech leży poziomo a oś  $y$  ustawmy pionowo). Funkcję Hamiltona otrzymamy w postaci

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + mgy.$$

Jak wiemy, za wyjątkiem rzutu pionowego, współrzędna  $x$  rośnie monotonicznie, czyli może wystąpić w roli parametru ewolucji  $\xi$  w opisie zredukowanym. Rozviklując związek  $H = const = E$  mamy nową funkcję Hamiltona –  $\pi$

$$-\pi \equiv -p_x = -\left(\pm \sqrt{2m(E - mgy) - p_y^2}\right) = H_{red}.$$

(znak przed pierwiastkiem zależy oczywiście od warunków początkowych).

Zredukowane równania Hamiltona mają postać:

$$\frac{dp_y}{dx} = -\frac{\partial H_{red}}{\partial y} = -\frac{m^2 g}{p_{x_0}} \Rightarrow p_y = p_{y_0} - \frac{m^2 g}{p_{x_0}} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial H_{red}}{\partial p_y} = \frac{p_y}{p_{x_0}}.$$

a ich rozwiązaniem jest tor punktu (parabola):

$$y(x) = y_0 + \frac{p_{y_0}}{p_{x_0}} x - \frac{m^2 g}{2 p_0^2} x^2.$$

## X. „CIECZ” FAZOWA

Rozważmy układ mechaniczny o  $s$  stopniach swobody. Przestrzeń fazowa tego układu niech będzie opisana współrzędnymi  $\underline{q}$ ,  $\underline{p}$ . Zadanie punktu w przestrzeni fazowej równoważne jest zadaniu określonych warunków początkowych: równania Hamiltona wyprowadzą z tego punktu jednoznaczną trajektorię i wyznaczą czasową parametryzację tej trajektorii.

Z tej jednoznaczności wynika, że trajektoria w przestrzeni fazowej nie może przecinać samej siebie (por. wcześniejsze zadanie) a także nie mogą się przecinać dwie różne trajektorie. Nie jest też możliwe, aby dwie trajektorie spotkały się w jakimś punkcie i „zlepiły” w jedną, ponieważ równania Hamiltona pozwalają na jednoznaczne odtworzenie trajektorii wstecz w czasie. Zauważmy jeszcze, że w pełnej zgodzie z powyższymi warunkami pozostaje trajektoria w postaci zamkniętej pętli. Trajektoria taka opisuje ruch okresowy (np. ruch nietłumionego wahadła).

Wyobraźmy sobie teraz zespół nieskończenie wielu identycznych układów mechanicznych (identycznych, a więc posiadających wspólną przestrzeń fazową). Zakreślmy pewien obszar  $W_0$  w przestrzeni fazowej i punkty tego obszaru traktujemy jako różne warunki początkowe, zadane w pewnej wspólnej chwili, dla nieskończonej liczby identycznych układów mechanicznych. Wszystkie punkty wybranego obszaru dadzą początek trajektoriom, których końce, odpowiadające dowolnej chwili późniejszej  $t$ , wyznaczą inny, zależny od czasu, obszar  $W_t$  w przestrzeni fazowej. Okazuje się, że objętość tego obszaru, rozumiana jako całka

$$V(t) = \int_{W_t} dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s$$

nie zależy od czasu (choć jego kształt będzie się na ogół zmieniał). Twierdzenie to nosi nazwę **twierdzenia Liouville'a**.

Każdemu punktowi  $(\underline{q}, \underline{p})$  w przestrzeni fazowej równania Hamiltona przypisują odpowiedni „wektor” uogólnionej,  $2s$ -wymiarowej prędkości  $(\underline{\dot{q}}, \underline{\dot{p}})$ .

Dla przybliżenia istoty twierdzenia Liouville'a rozważmy dywergencję tego „wektorowego” pola prędkości:

$$\sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0.$$

Twierdzenie Liouville'a wynika ze znikania tej dywergencji. Aby to zrozumieć rozważmy pole prędkości cząstek jakiejś plastycznej substancji, cieczy lub gazu, wypełniającej przestrzeń. Dywergencja tego pola prędkości  $\vec{v}$ , obliczona w jakimś punkcie, to granica

$$\text{div} \vec{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \vec{v} \cdot d\vec{s},$$

gdzie  $V$  oznacza objętość zmiernego do zera zamkniętego obszaru otaczającego ten punkt, a całka bierze się po powierzchni tego obszaru i oznacza wypływ substancji z obszaru. Wypływ ten może być różny od zera tylko na dwóch zasadach: albo substancja rodzi się (lub znika) wewnątrz obszaru, albo zmienia się gęstość przestrzenna substancji (na przykład rozprężający się gaz dałby dodatni wypływ). W przypadku przestrzeni fazowej trajektorie są ciągłe (nie urywają się, ani nie rodzą się nowe trajektorie.) Z tego, i ze znikania dywergencji, wynika, że gęstość przestrzenna punktów przestrzeni fazowej tworzących obszar  $V_t$  nie ulega zmianie podczas biegu czasu a więc też i objętość obszaru  $V_t$  jest stała. Przedstawione tu rozumowanie nie aspiruje do rangi dowodu twierdzenia Liouville'a. Porządny, rachunkowy dowód można np. znaleźć w podręczniku Grzegorza Białkowskiego *Mechanika klasyczna*, rozdział XX, §3. Przytoczymy go tu w oryginalnych oznaczeniach, chociażby dla jego urody.

A więc za Białkowskim oznaczymy współrzędne w przestrzeni fazowej symbolami  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, 2s$  (niech na przykład  $\xi_1, \dots, \xi_s \equiv \underline{q}$ ,  $\xi_{s+1}, \dots, \xi_{2s} \equiv \underline{p}$ ). Tak więc objętość dowolnie wybranego, i ewoluującego z upływem czasu obszaru  $W_t$  w przestrzeni fazowej zapiszemy w postaci



$$V(t) = \int_{W_t} d\xi_1 \dots d\xi_{2s}.$$

Obszar w przestrzeni fazowej, po którym wykonywana jest ta całka, zmienia się z upływem czasu (nie zmienia się tylko jego objętość, co właśnie mamy wykazać). Dlatego obliczanie pochodnej  $\frac{dV}{dt}$  wprost z wypisanej tu całki byłoby kłopotliwe. Musimy zapisać tę całkę w taki sposób, aby obszar całkowania nie zależał od czasu. Z tego, że każdy punkt aktualnego obszaru  $W_t$  został jednoznacznie wywiedziony z określonego punktu obszaru  $W_0$ , wynika, że obszar  $W_t$  można jednoznacznie sparametryzować współrzędnymi punktów obszaru  $W_0$ , które oznaczymy symbolami  $X_1, \dots, X_{2s}$ , i dla ich numeracji użyjemy wskaźnika greckiego, np.  $X_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, 2s$ . Objętość ewoluującego obszaru możemy teraz zapisać w postaci całki po obszarze  $W_0$ :

$$V(t) = \int_{W_0} \left| \det \frac{\partial \xi_i}{\partial X_\alpha} \right| dX_1 \dots dX_{2s} \equiv \int_{W_0} J(t) dX_1 \dots dX_{2s}.$$

Badanie pochodnej  $\frac{dV}{dt}$  sprowadza się do badania pochodnej jacobianu  $\frac{dJ}{dt}$ .

(Występujące w jacobianie pochodne cząstkowe  $\frac{\partial \xi_i}{\partial X_\alpha}$  oznaczmy w skrócie  $\xi_{i,\alpha}$ .)

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_{i,\alpha} \frac{\partial J}{\partial \xi_{i,\alpha}} \frac{d}{dt} (\xi_{i,\alpha}) = \sum_{i,\alpha} \frac{\partial J}{\partial \xi_{i,\alpha}} \dot{\xi}_{i,\alpha}.$$

Skupimy się teraz na pochodnej cząstkowej  $\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,\alpha}}$ . Skorzystamy ze znanego z rachunku macierzowego wzoru:

$$\sum_{\alpha} a_{l\alpha} \frac{\partial (\det A)}{\partial a_{l\alpha}} \equiv \delta_{li} \det A,$$

(liczby  $a$  są elementami macierzy  $A$ ), który staje się jasny, jeżeli uświadomimy sobie, że dla  $l \neq i$  lewa strona oznacza wyznacznik z macierzy uzyskanej z macierzy  $A$  przez zastąpienie  $i$ -tego wiersza wierszem  $l$ -tym.

Wzór ten zastosowany do naszego przypadku zapiszemy w postaci

$$\sum_{\alpha} \xi_{l\alpha} \frac{\partial J}{\partial \xi_{i\alpha}} \equiv \delta_{li} J.$$

Pomnóżmy go przez  $X_{\beta,l}$  i wysumujmy po  $l$ :

$$X_{\beta,i} J = \sum_{\alpha,l} \frac{\partial X_{\beta}}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial X_{\alpha}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{i\alpha}} = \sum_{\alpha} \delta_{\beta,\alpha} \frac{\partial J}{\partial \xi_{i\alpha}} = \frac{\partial J}{\partial \xi_{i\beta}}.$$

Podstawiając ten wynik do wzoru na pochodną jacobianu po czasie otrzymujemy

$$\frac{dJ}{dt} = J \sum_{i,\alpha} X_{\alpha,i} \dot{\xi}_{i,\alpha} = J \sum_{i,\alpha} \frac{\partial \xi_i}{\partial X_{\alpha}} \frac{\partial X_{\alpha}}{\partial \xi_i} = J \operatorname{div} \dot{\xi} = 0$$

c.b.d.o.

## XI. TRANSFORMACJE KANONICZNE

Transformacją kanoniczną nazwiemy każdą zmianę zmiennych fazowych

$$\underline{Q} = \underline{Q}(\underline{p}, \underline{q}, t), \quad \underline{P} = \underline{P}(\underline{p}, \underline{q}, t),$$

po której równania Hamiltona, zapisane w pierwotnych zmiennych w postaci

$$\frac{d\underline{q}}{dt} = \frac{\partial H(\underline{p}, \underline{q}, t)}{\partial \underline{p}}, \quad \frac{d\underline{p}}{dt} = -\frac{\partial H(\underline{p}, \underline{q}, t)}{\partial \underline{q}},$$

przyjmą w nowych zmiennych postać

$$\frac{d\underline{Q}}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}(\underline{P}, \underline{Q}, t)}{\partial \underline{P}}, \quad \frac{d\underline{P}}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}(\underline{P}, \underline{Q}, t)}{\partial \underline{Q}},$$

przy czym na razie nie precyzujemy, jaką postać powinna mieć nowa funkcja Hamiltona  $\tilde{H}$ .

Pokazaliśmy wyżej, że równania Hamiltona równoważne są uogólnionej zasadzie wariacyjnej w przestrzeni fazowej. Nasze życzenie, aby po transformacji  $(\underline{p}, \underline{q}) \rightarrow (\underline{P}, \underline{Q})$  zachowany został kształt równań Hamiltona, można więc wyrazić jako żądanie, aby opisujące ruch, czyli zależne od czasu nowe zmienne fazowe  $\underline{Q}(t) = \underline{Q}[q(t), p(t), t]$ ,  $\underline{P}(t) = \underline{P}[q(t), p(t), t]$  były punktem stacjonarnym działania w sensie uogólnionej zasady wariacyjnej

$$\delta S' = \delta \int_{t_1}^{t_2} (\underline{P} \dot{\underline{Q}} - \tilde{H}) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (\underline{P} d\underline{Q} - \tilde{H} dt) = 0.$$

Udowodnimy, że warunkiem wystarczającym na to, aby transformacja  $(\underline{p}, \underline{q}) \rightarrow (\underline{P}, \underline{Q})$  była kanoniczna, jest, aby istniała tzw. funkcja tworząca  $F(\underline{q}, \underline{Q}, t)$ , spełniająca związki

$$\underline{p} = \frac{\partial F}{\partial \underline{q}}, \quad \underline{P} = -\frac{\partial F}{\partial \underline{Q}}$$

i że nową funkcją Hamiltona jest wówczas wielkość

$$\tilde{H}(\underline{P}, \underline{Q}, t) = \frac{\partial F}{\partial t} + H(\underline{p}, \underline{q}, t),$$

w której zmienne  $\underline{p}$ ,  $\underline{q}$  powinny być wyrażone przez zmienne  $\underline{P}$  i  $\underline{Q}$ .<sup>15</sup>

Dowód:

Pokażemy, że w wypadku spełnienia przesłanek wymienionych w twierdzeniu, funkcje  $\underline{P}(t)$  i  $\underline{Q}(t)$  spełniają równania Hamiltona z funkcją Hamiltona  $\tilde{H}$ .

Wiemy już, że warunkiem koniecznym i wystarczającym dla tego, aby funkcje  $\underline{P}(t)$  i  $\underline{Q}(t)$  spełniały równania Hamiltona jest, aby znikła wariacja funkcjonału

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} (\underline{P}\dot{\underline{Q}} - \tilde{H}) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\underline{P}d\underline{Q} - \tilde{H}dt) \quad \text{dla dowolnych wariacji } \delta\underline{P}(t), \delta\underline{Q}(t) \text{ znikających na}$$

końcach „odcinka czasowego”  $(t_1, t_2)$ . Wystarczy więc pokazać, że jeżeli funkcje  $\underline{p}(t)$  i  $\underline{q}(t)$  spełniają równania Hamiltona i istnieje opisana w twierdzeniu funkcja tworząca, to znika wspomniana wyżej wariacja funkcjonału  $S'$  (zauważmy, że znikanie kompletu wariacji  $\delta\underline{p}$  i  $\delta\underline{q}$  w chwilach  $t_1$  i  $t_2$  wymusza znikanie wariacji  $\delta\underline{P}$  i  $\delta\underline{Q}$  w tych samych chwilach). W tym celu rozważamy różnicę

$$S - S' = \int_{t_1}^{t_2} [\underline{p}d\underline{q} - \underline{P}d\underline{Q} + (\tilde{H} - H)dt].$$

Jeżeli spełnione są przesłanki twierdzenia, to

$$\begin{aligned} S - S' &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial \underline{q}} d\underline{q} + \frac{\partial F}{\partial \underline{P}} d\underline{Q} + \frac{\partial F}{\partial t} dt \right] = \int_{t_1}^{t_2} dF = F(t_2) - F(t_1) \\ &= F[\underline{q}(t_2), \underline{Q}(t_2), t_2] - F[\underline{q}(t_1), \underline{Q}(t_1), t_1]. \end{aligned}$$

---

<sup>15</sup> Warunek ten wymaga komentarza. Fizyczne (czyli spełniające równania Hamiltona) funkcje  $\underline{p}(t)$  i  $\underline{q}(t)$  indukują (poprzez wzory  $\underline{P} = \underline{P}(\underline{p}, \underline{q}, t)$ ,  $\underline{Q} = \underline{Q}(\underline{p}, \underline{q}, t)$ ) określoną zależność funkcyjną zmiennych  $\underline{P}$  i  $\underline{Q}$  od czasu. Chodzi więc o to, aby wielkości  $\frac{\partial F}{\partial \underline{q}}$  zależały od czasu tak samo, jak funkcje  $\underline{p}$ , zaś wielkości

$-\frac{\partial F}{\partial \underline{Q}}$  – tak samo, jak funkcje  $\underline{P}$ .

Zauważmy, że wyrażenie to nie zmienia się, gdy dokonujemy zgodnych z przyjętymi ograniczeniami wariacji funkcji  $\underline{p}(t)$  i  $\underline{q}(t)$  (indukujących wariacje funkcji  $\underline{P}(t)$  i  $\underline{Q}(t)$ ), ponieważ wartości funkcji  $F$  w chwilach  $t_1$  i  $t_2$  nie ulegają przy tym zmianie. Oznacza to dalej, że stacjonarność działania  $S$  na fazowej trajektorii  $\underline{p}(t)$ ,  $\underline{q}(t)$  pociąga za sobą stacjonarność działania  $S'$  na indukowanej przez nią trajektorii  $\underline{P}(t)$ ,  $\underline{Q}(t)$ ,

c.b.d.o.

Zauważmy, że jeżeli transformacja kanoniczna, generowana przez funkcję tworzącą  $F$ , nie zależy jawnie od czasu, czyli jeżeli  $F = F(\underline{q}, \underline{Q})$ , to związki między nowymi i starymi współrzędnymi fazowymi mają postać

$$\underline{Q} = \underline{Q}(\underline{p}, \underline{q}), \quad \underline{P} = \underline{P}(\underline{p}, \underline{q}),$$

oraz zachodzi

$$\tilde{H}(\underline{P}, \underline{Q}, t) = H(\underline{p}, \underline{q}, t)$$

czyli w takim przypadku nowa funkcja Hamiltona powstaje ze starej przez zwykłą zmianę zmiennych.

Wróćmy do wyrażenia będącego różniczką zupełną funkcji tworzącej  $F(\underline{q}, \underline{Q}, t)$

$$\underline{p}d\underline{q} - \underline{P}d\underline{Q} + (\tilde{H} - H)dt = dF(\underline{q}, \underline{Q}, t).$$

Znając funkcję tworzącą  $F(\underline{q}, \underline{Q}, t)$ , możemy, przez rozwikłanie równań

$$\underline{p} = \frac{\partial F}{\partial \underline{q}}, \quad \underline{P} = -\frac{\partial F}{\partial \underline{Q}},$$

odtworzyć transformację kanoniczną, której ta funkcja odpowiada. I na odwrót: całkowanie tych równań zwykle pozwala obliczyć funkcję tworzącą<sup>16</sup>.

Funkcja  $F(\underline{q}, \underline{Q}, t)$  nie jest jedyną funkcją tworzącą odpowiadającą danej transformacji kanonicznej. Do formuły przedstawiającej różniczkę funkcji  $F(\underline{q}, \underline{Q}, t)$  możemy na przykład dodać obustronnie różniczkę wyrażenia  $\underline{P}\underline{Q}$ , co daje

$$\underline{p}d\underline{q} + \underline{Q}d\underline{P} + (\tilde{H} - H)dt = d[F(\underline{q}, \underline{Q}, t) + \underline{P}\underline{Q}] = d\Phi(\underline{q}, \underline{P}, t),$$

<sup>16</sup> Jak się przekonamy, funkcja tworząca nie zawsze istnieje.

przy czym nowa funkcja tworząca  $\Phi(\underline{q}, \underline{P}, t)$  spełnia związki

$$\underline{p} = \frac{\partial \Phi(\underline{q}, \underline{P}, t)}{\partial \underline{q}}, \quad \underline{Q} = \frac{\partial \Phi(\underline{q}, \underline{P}, t)}{\partial \underline{P}},$$

będące zapisem tej samej transformacji kanonicznej. Chwila namysłu pozwala zauważyć inne możliwości: odpowiednio dobierając sumę iloczynów zmiennych dodawaną (lub odejmowaną) do (od) wyjściowej funkcji tworzącej, otrzymamy inne funkcje tworzące tej samej transformacji kanonicznej. Mnogość możliwych wersji funkcji tworzącej ma znaczenie w sytuacji, gdy nie wszystkie te wersje istnieją.

#### ZADANIE

Rozważmy dwuwymiarową przestrzeń fazową sparametryzowaną zmiennymi  $p, q$ . Znajdź funkcję tworzącą  $\Phi(q, P)$  transformacji  $P = p + \alpha q^2$ ,  $Q = q$  (stałą  $\alpha$  wprowadziliśmy dla uzgodnienia wymiarów). Sprawdź, czy istnieje funkcja  $F(q, Q)$ .

Rozwiązanie:

Korzystając z wyprowadzonych wyżej wzorów na pochodne cząstkowe funkcji tworzącej  $\Phi(q, P)$ , mamy:

$$p = \frac{\partial \Phi(q, P)}{\partial q} = P - \alpha q^2, \quad Q = \frac{\partial \Phi(q, P)}{\partial P} = q.$$

Na podstawie tych dwóch równań odtwarzamy funkcję tworzącą:

$$\Phi(q, P) = Pq - \frac{\alpha}{3}q^3 + C_1(P), \quad \Phi(q, P) = Pq + C_2(q),$$

czyli

$$\Phi(q, P) = Pq - \frac{\alpha}{3}q^3.$$

Funkcja tworząca  $F(q, Q)$  nie istnieje. Mamy bowiem formalnie

$$F(q, Q) = \Phi(q, P(q, Q)) - P(q, Q)Q,$$

ale wzorów transformacyjnych

$$P = p + \alpha q^2, \quad q = Q$$

nie da się do końca rozwikłać względem zmiennych  $P$  i  $p$  dla uzyskania związków

$$P = P(q, Q) \text{ i } p = p(q, Q).$$

Mamy tu więc przykład sytuacji, w której nie istnieje funkcja tworząca  $F(q, Q)$ , a pomimo tego transformacja jest kanoniczna (bo istnieje inna funkcja tworząca tej transformacji).

#### ZADANIE 11.2

Udowodnij bezpośrednim rachunkiem, że transformacja  $P = p + \alpha q^2$ ,  $Q = q$  jest kanoniczna, czyli pokaż, że zachowuje postać równań Hamiltona:

$$\dot{P} = -\frac{\partial H[p(P, Q), q(P, Q)]}{\partial Q}, \quad \dot{Q} = \frac{\partial H[p(P, Q), q(P, Q)]}{\partial P}.$$

Dla ćwiczenia warto sprawdzić, czy transformacja  $P = pq + \alpha q^2$ ,  $Q = q$  jest kanoniczna. (Nie jest.)

Rozwiązanie:

Niżej będzie nam potrzebny zapis transformacji po rozwikłaniu względem starych zmiennych:

$$p = P - \alpha Q^2, \quad q = Q.$$

Obliczamy

$$\dot{P} = \frac{d}{dt} P(p, q) = \frac{\partial P}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial P}{\partial q} \dot{q} = \dot{p} + 2\alpha q \dot{q}, \quad \dot{Q} = \frac{d}{dt} Q(p, q) = \frac{\partial Q}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial Q}{\partial q} \dot{q} = \dot{q}.$$

Z drugiej strony powinno zachodzić

$$\dot{P} = -\frac{\partial H[p(P, Q), q(P, Q)]}{\partial Q} = -\frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial Q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial Q} = -\dot{q}(-2\alpha Q) + \dot{p} = 2\alpha q \dot{q} + \dot{p}$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial H[p(P, Q), q(P, Q)]}{\partial P} = \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial P} + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial P} = \dot{q}$$

c.b.d.o.

Podobny rachunek, wykonany dla drugiej transformacji, nie prowadzi do pomyślnego rezultatu.

### ZADANIE 11.3

Udowodnij, że transformacja  $P = q$ ,  $Q = p$  nie jest kanoniczna. Jakiej zmiany należało by dokonać w tej transformacji, aby była kanoniczna?

### ZADANIE 11.4

Udowodnij, że złożenie dwóch transformacji kanonicznych, obydwu posiadających funkcje tworzące danego rodzaju (np.  $F(\underline{q}, \underline{Q})$ ), jest transformacją kanoniczną. Jaka jest funkcja tworząca tej transformacji?

Rozwiązanie:

Rozważamy dwie wykonane “jedna po drugiej” transformacje kanoniczne:

$$\underline{Q} = \underline{Q}(\underline{p}, \underline{q}), \quad \underline{P} = \underline{P}(\underline{p}, \underline{q})$$

oraz

$$\underline{Q}' = \underline{Q}'(\underline{P}, \underline{Q}), \quad \underline{P}' = \underline{P}'(\underline{P}, \underline{Q}),$$

którym niech odpowiadają funkcje tworzące  $F_1(\underline{q}, \underline{Q})$  i  $F_2(\underline{Q}, \underline{Q}')$ .

Należy przez bezpośrednie wyliczenie pokazać, że funkcją tworzącą złożenia tych transformacji jest funkcja  $F_1(\underline{q}, \underline{Q}) + F_2(\underline{Q}, \underline{Q}') = F(\underline{q}, \underline{Q}')$ . Zmienne  $\underline{Q}$  znikają z funkcji tworzącej  $F$  na następującej zasadzie: 6s zmiennych  $\underline{q}, \underline{p}, \underline{Q}, \underline{P}, \underline{Q}', \underline{P}'$  związanych jest 4s wypisanymi wyżej zależnościami. Pozwala to (za wyjątkiem sytuacji osobliwych) na wyrażenie wszystkich 6s zmiennych (w tym również zmiennych  $\underline{Q}$ ) przez wybranych 2s zmiennych, na przykład przez zmienne  $\underline{q}, \underline{Q}'$ .

## XII. RUCH JAKO TRANSFORMACJA KANONICZNA

Pokażemy teraz, że istnieje rodzina takich transformacji kanonicznych, które jak gdyby wygaszają ruch. Rozważymy taką zależną od czasu transformację zmiennych fazowych  $p, q$  na zmienne  $P, Q$ , która podczas trwania ruchu zmieniałaby aktualne wartości starych zmiennych  $\underline{p}(t)$  i  $\underline{q}(t)$  na ich wartości początkowe  $\underline{P}(t) = \underline{p}_0$  i  $\underline{Q}(t) = \underline{q}_0$ . Udowodnimy, że transformacja taka jest kanoniczna i że jej funkcją tworzącą w wersji  $F(\underline{q}, \underline{Q}, t) \equiv S(\underline{q}, \underline{q}_0, t)$  jest działanie, obliczane dla ruchu fizycznego, rozpoczynającego się w punkcie  $\underline{q}_0$ , kończącego w punkcie  $\underline{q}$  i zajmującego czas  $t$ .

Dowód:

Skoro  $S = S(\underline{q}, \underline{q}_0, t)$  ma wystąpić w roli funkcji tworzącej, to liczby  $\underline{q}_0$  stoją tu na miejscu nowych zmiennych  $\underline{Q}$ . Wystarczy więc pokazać, że:

$$\frac{\partial S}{\partial \underline{q}} = \underline{p}(t), \quad \frac{\partial S}{\partial \underline{q}_0} = -\underline{p}_0,$$

a przy okazji zobaczymy, jak wygląda nowa funkcja Hamiltona  $\tilde{H}$ .

Dla dowodu porównamy dwa fizyczne ruchy, obydwa zaczynające się w punkcie  $\underline{q}_0$  w chwili  $t = 0$  a kończące w chwili  $t$  – odpowiednio – w punktach  $\underline{q}$  i  $\underline{q} + \Delta \underline{q}$ . Ruchom tym odpowiadają nieco różniące się wartości całek działania, odpowiednio  $S$  i  $S' = S + \Delta S$ . Porównajmy je. Działanie  $S'$  jest różne od działania  $S$ , ponieważ ruch fizyczny zmierzający do osiągnięcia w chwili  $t$  punktu  $\underline{q} + \Delta \underline{q}$  musi odbywać się po nieco innym torze i z innymi prędkościami, niż ruch kończący się w chwili  $t$  w punkcie  $\underline{q}$ . Różnice te, będące funkcjami czasu bieżącego  $t'$ , oznaczmy symbolami  $\delta \underline{q}(t')$  i  $\delta \dot{\underline{q}}(t')$ . Mamy więc<sup>17</sup>

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_0^t (\Delta L) dt' \approx \int_0^t \left( \frac{\partial L}{\partial \underline{q}} \delta \underline{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}} \delta \dot{\underline{q}} \right) dt' \\ &= \int_0^t \left[ \frac{\partial L}{\partial \underline{q}} \delta \underline{q} - \frac{d}{dt'} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}} \delta \underline{q} \right) \right] dt' + \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}} \delta \underline{q} \Big|_0^t = \underline{p}(t) \Delta \underline{q}(t), \end{aligned}$$

bo wyrażenie w nawiasie kwadratowym pod całką znika na mocy równań Lagrange'a. Widać stąd, że pochodna cząstkowa fizycznego działania po wartości współrzędnych punktu końcowego  $\underline{q}(t)$  wynosi  $\underline{p}(t)$ .

W podobny sposób, porównując działania obliczone dla dwóch ruchów fizycznych, obydwo kończących się w chwili  $t$  w punkcie  $\underline{q}(t)$  a zaczynających w punktach  $\underline{q}_0$  i  $\underline{q}_0 + \Delta \underline{q}_0$ , sprawdzimy, że

$$\frac{\partial S}{\partial \underline{q}_0} = -\underline{p}(0) = -\underline{p}_0.$$

Pozostaje sprawdzić, jaką postać ma nowa funkcja Hamiltona. W tym celu musimy obliczyć pochodną cząstkową działania  $S = S(\underline{q}, \underline{q}_0, t)$  (o którym już wiemy, że jest funkcją tworzącą rozważanej transformacji) po czasie trwania fizycznego ruchu od punktu  $\underline{q}_0$  do

<sup>17</sup> Różnicę  $\Delta q$  zamierzamy uczynić nieskończenie małą, co sprawi, że równość przybliżona stanie się równością ścisłą.



punktu  $\underline{q}$ . Rozważamy więc dwa ruchy fizyczne, obydwa zaczynające się w punkcie  $q_0$  a kończące w punkcie  $\underline{q}$ , ale trwające – odpowiednio – czas  $t$  i  $t + \Delta t$ , i porównujemy odpowiadające im działania:

$$\begin{aligned} \Delta S &\approx \int_0^t (\Delta L) dt' + \int_t^{t+\Delta t} L dt' \approx \int_0^t \left( \frac{\partial L}{\partial \underline{q}} \delta \underline{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}} \delta \dot{\underline{q}} \right) dt' + L(t) \Delta t \\ &= \int_0^t \left[ \frac{\partial L}{\partial \underline{q}} \delta \underline{q} - \frac{d}{dt'} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}} \right) \delta \underline{q} \right] dt' + \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}} \delta \underline{q} \Big|_0^t + L(t) \Delta t = \underline{p}(t) \delta \underline{q}(t) + L(t) \Delta t, \end{aligned}$$

Wielkości  $\delta \underline{q}$  i  $\delta \dot{\underline{q}}$  biorą się stąd, że ruch trwający czas  $t + \Delta t$  odbywa się po nieco innym torze i z nieco innymi prędkościami, niż ruch trwający czas  $t$ . W szczególności wielkość  $\delta \underline{q}(t)$  jest związana z tym, że obiekt dobiega do punktu  $\underline{q}$  dopiero w chwili  $t + \Delta t$ , zaś w chwili  $t$  jest jeszcze od punktu  $\underline{q}$  odległy o  $\delta \underline{q}(t)$ . Pozostaje teraz tylko zrozumieć, że  $\delta \dot{\underline{q}}_i(t) = -\dot{\underline{q}}_i(t) \Delta t$ , co pozwala napisać

$$\Delta S \approx -\underline{p}(t) \dot{\underline{q}}(t) \Delta t + L(t) \Delta t = -H(t) \Delta t,$$

czyli

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(t) = \tilde{H}(t) - H(t).$$

Wnosimy stąd, że nowa funkcja Hamiltona  $\tilde{H}$  wynosi zero (tożsamościowe zero!). Ten wynik nie zaskakuje. Wartości nowych współrzędnych nie zależą bowiem od czasu, czyli  $\dot{\underline{Q}} = 0$ ,  $\dot{\underline{P}} = 0$ . Oznacza to, że  $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \underline{P}} = 0$  i  $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \underline{Q}} = 0$ , czyli że nowa funkcja Hamiltona nie zależy ani od nowych współrzędnych ani od nowych pędów. Z rachunku, który właśnie zakończyliśmy, wynika też, że nie zależy od czasu.

### XIII. RÓWNANIE HAMILTONA-JACOBIEGO.

Rozważona wyżej szczególna, zależna od czasu transformacja kanoniczna, która na bieżąco likwiduje skutki upływu czasu, nie jest oczywiście jedyną transformacją kanoniczną o tej własności. Możemy ją bowiem złożyć z dowolną niezależną od czasu transformacją kanoniczną, którą zapiszemy w ogólnej postaci

$$\underline{Q}' = Q'(\underline{P}, \underline{Q}), \quad \underline{P}' = P'(\underline{P}, \underline{Q})$$

uzyskując w ten sposób nową transformację, przy pełnej gwarancji, że w miarę upływu czasu wartości zmiennych  $Q', P'$  nie będą zależały od czasu, bo wartości współrzędnych  $\underline{P} = \underline{p}_0$  i

$\underline{Q} = \underline{q}_0$  nie zmieniają się podczas trwania ruchu. Oczywiście nowa funkcja Hamiltona  $\tilde{H}'$  też będzie równa zero, bo  $\tilde{H}'(\underline{P}', \underline{Q}') = \tilde{H}[P(\underline{P}', \underline{Q}'), Q(\underline{P}', \underline{Q}')] = 0$ . W ten sposób doszliśmy do całej rodziny zależnych od czasu transformacji kanonicznych “kasujących” ruch w tym sensie, że wartości nowych współrzędnych nie zależą od czasu, gdy stare współrzędne  $\underline{p}, \underline{q}$  zależą od czasu zgodnie z zasadami dynamiki. Tej rodzinie transformacji kanonicznych odpowiada rodzina funkcji tworzących  $S''(\underline{q}, \underline{Q}')_0$  będących w każdym przypadku sumą funkcji

$$S(\underline{q}, \underline{q}_0, t) + S'(\underline{q}_0, \underline{Q}'_0) = S''(\underline{q}, \underline{Q}'_0, t).$$

Wszystkie funkcje tworzące  $S''(\underline{q}, \underline{Q}'_0, t)$  spełniają związki

$$\frac{\partial S''}{\partial t} = -H(t), \quad \frac{\partial S''}{\partial \underline{q}} = \underline{p}(t) \quad \frac{\partial S''}{\partial \underline{Q}'_0} = -\underline{P}'_0 = \text{const}$$

Zauważmy też, że nazwanie współrzędnych  $\underline{Q}'_0$  “nowymi współrzędnymi konfiguracyjnymi”, a współrzędnych  $\underline{P}'_0$  “nowymi pędami”, co sugerują oznaczenia, jest kwestią umowy, ponieważ na przykład transformacja  $\underline{P} = -\underline{q}$ ,  $\underline{Q} = \underline{p}$ , polegająca na zamianie rolami pędów i współrzędnych konfiguracyjnych, też jest kanoniczna. Lepiej więc od razu zrezygnować z oznaczeń, które mogą sugerować konkretną interpretację stałych  $\underline{Q}'_0$ ,  $\underline{P}'_0$  i napisać  $S'' = S''(\underline{q}, \underline{\alpha}, t)$ .

Każda funkcja  $S''$  spełnia związki

$$\frac{\partial S''(\underline{q}, \underline{\alpha}, t)}{\partial t} = -H(t), \quad \frac{\partial S''(\underline{q}, \underline{\alpha}, t)}{\partial \underline{q}} = \underline{p}(t), \quad \frac{\partial S''(\underline{q}, \underline{\alpha}, t)}{\partial \underline{\alpha}} = \underline{\beta} = \text{const}.$$

Nietrudno zrozumieć, że powinno istnieć podejście do mechaniki, w którym zadanie znalezienia ruchu  $\underline{q}(t)$ ,  $\underline{p}(t)$  zostanie zastąpione zadaniem znalezienia funkcji tworzącej jednej z takich szczególnych transformacji kanonicznych. Podejście to realizowane jest w postaci równania Hamiltona-Jacobiego.

Punktem wyjścia do napisania tego równania jest związek

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(t) = -H[\underline{p}(t), \underline{q}(t), t] \quad (\text{przedstawione wyżej rozumowanie nie wymaga założenia, że funkcja Hamiltona } H \text{ nie zależy jawnie od czasu, stąd niezależny argument } t \text{ w funkcji } H)$$

Jak już wiemy, równanie to jest spełnione nie tylko przez szczególną funkcję tworzącą  $S = S(\underline{q}, \underline{q}_0, t)$  wyprowadzoną w poprzednim rozdziale z fizycznego działania, ale również przez każdą inną funkcję tworzącą z rodziny funkcji tworzących  $S''$ , o których wyżej pisaliśmy. Niech więc funkcja  $S$  występująca w powyższym związku będzie jedną z tych

funkcji (zgodnie ze zwyczajem opuszczamy znaczek podwójnego prima), czyli niech  $S = S(\underline{q}, \underline{\alpha}, t)$ . Powinno więc zachodzić

$$\frac{\partial S(\underline{q}, \underline{\alpha}, t)}{\partial t} = -H(t), \quad \frac{\partial S(\underline{q}, \underline{\alpha}, t)}{\partial \underline{q}} = \underline{p}(t), \quad \frac{\partial S(\underline{q}, \underline{\alpha}, t)}{\partial \underline{\alpha}} = \underline{\beta} = \text{const}$$

Komplety stałych  $\underline{\alpha}$  i  $\underline{\beta}$  są tymi stałymi, do których wybrana transformacja kanoniczna sprowadza bieżące wartości położenia i pędu.

Podstawiając do funkcji Hamiltona pędy bieżące  $\underline{p}(t)$  w postaci pochodnych cząstkowych  $\frac{\partial S(\underline{q}, \underline{\alpha}, t)}{\partial \underline{q}}$  otrzymujemy **równanie Hamiltona Jacobiego** w jego klasycznej postaci

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H \left[ \frac{\partial S}{\partial \underline{q}}, \underline{q}, t \right].$$

Jest to równanie różniczkowe cząstkowe, w którym niewiadomą jest zależna od  $s+1$  zmiennych funkcja  $S(\underline{q}, t)$ . Całka zupełna tego równania będzie zależna od  $s+1$  stałych. Funkcja  $S(\underline{q}, t)$  występuje w tym równaniu wyłącznie w postaci pochodnych, czyli jedna z tych stałych musi być stałą addytywną i jej wartość – jak się niżej okaże – nie ma dla nas znaczenia. Pozostałe stałe identyfikujemy ze stałymi  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ . Wiemy już, że istnieje cała nieskończona rodzina transformacji kanonicznych „kasujących ruch”. Przystępując do rozwiązywania równania Hamiltona-Jacobiego nie wiemy więc, którą z tych funkcji tworzących obliczymy — zależy to od sposobu, w jaki zorganizujemy sobie rachunek. Znajdujemy ją jako zależną od  $s$  stałych dowolnych  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ , a pochodne cząstkowe tej funkcji po tych stałych przyrównujemy do innych stałych  $\beta_1, \dots, \beta_s$ :

$$\frac{\partial S(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t)}{\partial \alpha_k} = \beta_k \quad k = 1, \dots, s \quad (\text{wszystkie te pochodne cząstkowe likwidują stałą addytywną, o której pisaliśmy wyżej}).$$

Zauważmy teraz, że nie ma znaczenia którą z nieskończenie wielu funkcji  $S = S(\underline{q}, \underline{\alpha}, t)$  obliczyliśmy. Otrzymaliśmy bowiem  $s$  równań, które rozwikłujemy względem  $q_1, \dots, q_s$ , otrzymując:

$$q_k = q_k(t, \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s) \quad k = 1, \dots, s.$$

Stałe  $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s$  wyznaczamy z warunków początkowych. Rozwiązanie równania Hamiltona-Jacobiego okazało się więc równoważne znalezieniu ruchu układu.<sup>18</sup>

Warto jeszcze zwrócić uwagę na możliwość wystąpienia sytuacji ułatwiających znalezienie funkcji  $S = S(\underline{q}, \underline{\alpha}, t)$ .

Jeżeli funkcja Hamiltona nie zależy jawnie od czasu, to pochodna cząstkowa  $\frac{\partial S}{\partial t} = -H$  jest stała (oznaczymy tę stałą symbolem  $-E$ ). Wynika z tego, że funkcja  $S$  powinna w takim przypadku zależeć od czasu w sposób następujący:

$$S = W(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, E) - Et$$

gdzie stałą  $E$  możemy albo bezpośrednio zidentyfikować z jedną ze stałych  $\alpha$  (tak właśnie uczyniliśmy w powyższym wzorze), albo też — bardziej ogólnie — traktować ją jako dowolną ustaloną funkcję wszystkich stałych  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ , której wartość wyznaczona jest z warunków początkowych, czyli

$$S = W(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s) - E(\alpha_1, \dots, \alpha_s)t.$$

W obydwu przypadkach równanie Hamiltona-Jacobiego przechodzi w „bezczasowe” równanie dla funkcji  $W(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, E)$  lub  $W(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s)$ :

$$E = H\left(\underline{q}, \frac{\partial W}{\partial \underline{q}}\right).$$

Kolejne udogodnienie ma miejsce gdy funkcja Hamiltona nie zależy jawnie od jednej ze zmiennych konfiguracyjnych (niech tą zmienna będzie zmienna  $q_s$ ). Na mocy odpowiedniego równania Hamiltona mamy wtedy bowiem  $\dot{p}_s = 0$ , czyli  $p_s = \text{const}$ . Oznacza to, że  $p_s = \frac{\partial S}{\partial q_s} = \text{const} = \pi$  i dlatego funkcja  $S$  przewidywana jest w postaci

$$S = \bar{W}(q_1, \dots, q_{s-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-2}, \pi, E) + \pi q_s - Et.$$

Równanie Hamiltona-Jacobiego również ulegnie odpowiedniej redukcji i zawiera teraz dwa stałe parametry  $\pi$  i  $E$  o wartościach wyznaczonych przez warunki początkowe

$$H = H(q_1, \dots, q_{s-1}, p_1, \dots, p_{s-1}, \pi) = H\left(q_1, \dots, q_{s-1}, \frac{\partial \bar{W}(q_1, \dots, q_{s-1})}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \bar{W}(q_1, \dots, q_{s-1})}{\partial q_{s-1}}, \pi\right) = E.$$

<sup>18</sup> Niżej pokażemy przykłady rozwiązywania równania Hamiltona-Jacobiego. Zauważymy tam, że znajdowanie funkcji  $S(\underline{q}, \underline{\alpha}, t)$  nie jest konieczne dla znalezienia ruchu. Istotnie, opis ruchu wynika ze wzorów  $\frac{\partial S}{\partial \underline{\alpha}} = \underline{\beta}$ , w których występują tylko pochodne cząstkowe funkcji tworzącej  $S$ , a te mogą być łatwiejsze do obliczenia od samej funkcji  $S$ .

Jego rozwiązaniem jest zależna od  $s-1$  zmiennych funkcja  $\bar{W}_{\pi,E}(q_1, \dots, q_{s-1})$ , zawierająca  $s-1$  stałych dowolnych. Skoro jednak funkcja  $\bar{W}$  występuje w równaniu tylko poprzez swoje pochodne cząstkowe, to jedna z tych stałych jest stałą addytywną. Pozostają więc  $s-2$  stałe dowolne, czyli rozwiązanie zredukowanego równania otrzymamy w postaci

$$\bar{W} = \bar{W}_{\pi,E}(q_1, \dots, q_{s-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-2}) \equiv \bar{W}(q_1, \dots, q_{s-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-2}, \pi, E)$$

a rozwiązanie wyjściowego równania Hamiltona-Jacobiego pozostaje zależne od  $s$  stałych  $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-2}, \pi, E$ .

### PRZYKŁAD

Rozważmy punkt materialny w polu opisanym potencjałem o symetrii sferycznej  $V(r)$ . Funkcja Hamiltona takiego układu ma we współrzędnych sferycznych  $r, \vartheta, \varphi$  postać (por. punkt 3 zadania 6.1)

$$H(r, \vartheta, \varphi, p_r, p_\vartheta, p_\varphi) = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) + V(r).$$

Wypisujemy równanie Hamiltona-Jacobiego

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = -H \left( r, \vartheta, \varphi, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r}, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \vartheta}, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \varphi} \right) = -\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + V(r)$$

i korzystając z tego, że funkcja Hamiltona nie zależy od czasu i od współrzędnej  $\varphi$ , przewidujemy kształt funkcji tworzącej  $S(r, \vartheta, \varphi, t, \underline{\alpha})$  w postaci

$$S(r, \vartheta, \varphi, t, \alpha, \pi_\varphi, E) = \bar{W}(r, \vartheta, \alpha, \pi_\varphi, E) + \pi_\varphi \varphi - Et,$$

gdzie symbolami  $\pi_\varphi$  i  $E$  oznaczyliśmy liczbowe, wynikające z warunków początkowych, wartości stałego pędu  $p_\varphi$  i energii.

Równanie Hamiltona-Jacobiego przyjmie teraz postać

$$E = \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial \bar{W}(r, \vartheta)}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \bar{W}(r, \vartheta)}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{\pi_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right] + V(r)$$

Funkcja  $\bar{W}$  zależy jeszcze od dwóch zmiennych, tak więc rozwiązania należałoby w zasadzie poszukiwać jako zależnego od dwóch stałych. Jak już jednak pisaliśmy wyżej (w odniesieniu do pełnej funkcji  $S$ ) jedna z tych stałych musi być stałą addytywną, bez znaczenia dla naszych rozważań. Tak więc funkcji  $\bar{W}$  poszukujemy jako zależnej od jednej

tylko stałą (jest to pierwsza z trzech stałych  $\underline{\alpha}$ , z których druga i trzecia zostały utożsamione z  $E$  i  $\pi_\varphi$ ), dla której pozostawmy oznaczenie  $\alpha$ . Oczywiście rozwiązanie  $\bar{W}$ , oprócz stałej  $\alpha$ , będzie też zawierało pozostałe stałe, czyli  $E$  i  $\pi_\varphi$ , jako będące elementem równania różniczkowego dla funkcji  $\bar{W}$ . Należałoby więc w zasadzie napisać ostatnie równanie w postaci

$$E = \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial \bar{W}_{\pi_\varphi, E}(r, \vartheta, \alpha)}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \bar{W}_{\pi_\varphi, E}(r, \vartheta, \alpha)}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{\pi_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right] + V(r).$$

Zauważmy jeszcze, że kształt rozważanej tu funkcji Hamiltona dodatkowo ułatwia znalezienie rozwiązania. Mamy bowiem do czynienia z przypadkiem, gdy jedna ze zmiennych konfiguracyjnych (zmienna  $\vartheta$ ) i sprzężony z nią pęd kanoniczny  $p_\vartheta$  a także zachowany w tym przypadku pęd  $p_\varphi$ , występują w wyrażeniu, które może być wyodrębnione w funkcji Hamiltona (tu – w nawiasach okrągłych)

$$H(r, \vartheta, \varphi, p_r, p_\vartheta, p_\varphi) = \frac{1}{2m} \left[ p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left( p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} \right) \right] + V(r)$$

i – jako takie – musi być zachowane (por. zadanie 9.1). Tak więc droga do ostatniej stałej  $\alpha$  jest tu krótka. Postulujemy bowiem kształt funkcji  $\bar{W}$  w postaci (taka operacja nazywa się separacją zmiennych i może być stosowana w opisanych tu warunkach)

$$\bar{W}(r, \vartheta) = R(r) + \Theta(\vartheta)$$

i otrzymujemy równanie Hamiltona-Jacobiego w postaci

$$E = \frac{1}{2m} \left\{ \left( \frac{dR(r)}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left[ \left( \frac{d\Theta(\vartheta)}{d\vartheta} \right)^2 + \frac{\pi_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} \right] \right\} + V(r)$$

Skoro jednak wyrażenie  $\left( \frac{d\Theta(\vartheta)}{d\vartheta} \right)^2 + \frac{\pi_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} = \alpha$  jest stałe, to mamy od razu

$$\Theta = \Theta_{\alpha, \pi_\varphi}(\vartheta) = \int \sqrt{\alpha - \frac{\pi_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta}} d\vartheta \quad (\text{plus pochodząca z całki nieoznaczonej stała addytywna, o której już wiemy, że okaże się nieistotna})$$

oraz

$$E = \frac{1}{2m} \left\{ \left( \frac{dR(r)}{dr} \right)^2 + \frac{\alpha}{r^2} \right\} + V(r),$$

czyli

$$R_{E,\alpha}(r) = \int \sqrt{2m\left(E - V(r) - \frac{\alpha}{r^2}\right)} dr \quad (\text{plus stała addytywna}).$$

Ostatecznie więc poszukiwane rozwiązanie równania Hamiltona-Jacobiego ma postać

$$S(r, \vartheta, \varphi, t, \alpha, \pi_\varphi, E) = R_{E,\alpha}(r) + \Theta_{\alpha,\pi_\varphi}(\vartheta) + \pi_\varphi \varphi - Et.$$

Całki występujących w powyższych wzorach nie oplaca się obliczać. Funkcja  $S$  - jak już wiemy - zostaje bowiem wykorzystana do napisania wzorów

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \beta_1, \quad \frac{\partial S}{\partial \pi_\varphi} = \beta_2, \quad \frac{\partial S}{\partial E} = \beta_3$$

i dopiero po obliczeniu tych pochodnych cząstkowych (co zmienia charakter funkcji podcałkowych) musimy wykonać wszystkie całkowania, a następnie otrzymane wzory rozwikłać, otrzymując ostateczne rozwiązanie w postaci

$$\begin{aligned} r &= r(t, \alpha, \pi_\varphi, E, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \\ \vartheta &= \vartheta(t, \alpha, \pi_\varphi, E, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \\ \varphi &= \varphi(t, \alpha, \pi_\varphi, E, \beta_1, \beta_2, \beta_3). \end{aligned}$$

Wartości sześciu ( $2s = 6$ ) stałych  $\alpha, \pi_\varphi, E, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  obliczamy z warunków początkowych.

### ZADANIE 13.1

Rozwiąż równanie Hamiltona-Jacobiego dla przypadku cząstki w jednorodnym polu grawitacyjnym, nadającym przyspieszenie  $g$ .

Rozwiązanie:

W polu jednorodnym tor cząstki zawiera się w płaszczyźnie wyznaczonej przez prędkość początkową i pion. Ograniczymy się więc do odpowiednio ustawionej płaszczyzny pionowej i w tej płaszczyźnie wprowadzimy współrzędne kartezjańskie  $x$  (oś pozioma) i  $z$ .

Funkcja Hamiltona ma postać  $H(x, z, p_x, p_z) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_z^2) + mgz$ . Wypisujemy równanie Hamiltona-Jacobiego

$$\frac{1}{2m} \left( \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right) + mgz = -\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Funkcja Hamiltona nie zależy jawnie od czasu i od współrzędnej  $x$ , czyli rozwiązania możemy szukać w postaci

$$S(x, z, t) = \bar{W}(z, p_x, E) + p_x x - Et,$$

co odpowiada przejściu do równania postaci:

$$\frac{1}{2m} \left( p_x^2 + \left( \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right)^2 \right) + mgz = E,$$

gdzie  $p_x$  i  $E$  są stałymi wyznaczonymi przez warunki początkowe. Znajdujemy funkcję  $\bar{W}$ :

$$\bar{W}(z, p_x, E) = \int dz \sqrt{2mE - p_x^2 - 2m^2 gz} + C,$$

ale - jak już wiemy - stała addytywna  $C$  nie ma znaczenia dla wyniku rachunków. Funkcja  $S(x, z, p_x, E)$  ma więc postać

$$S(x, z, t, p_x, E) = \int dz \sqrt{2mE - p_x^2 - 2m^2 gz} + p_x x - Et$$

i stąd

$$\frac{\partial S}{\partial p_x} = - \int dz \frac{p_x}{\sqrt{2mE - p_x^2 - 2m^2 gz}} + x = \beta_1 \quad \frac{\partial S}{\partial E} = \int dz \frac{m}{\sqrt{2mE - p_x^2 - 2m^2 gz}} - t = \beta_2.$$

Po scałkowaniu mamy:

$$\frac{p_x}{m^2 g} \sqrt{2mE - p_x^2 - 2m^2 gz} + x = \beta_1 \quad - \frac{1}{mg} \sqrt{2mE - p_x^2 - 2m^2 gz} - t = \beta_2$$

Wyznaczamy wartości stałych  $\beta$ . Niech dla  $t = 0$  zachodzi  $x = 0$ ,  $z = 0$ , Stąd

$$\beta_1 = \frac{p_x}{m^2 g} \sqrt{2mE - p_x^2} = \frac{p_x p_{y_0}}{m^2 g}, \quad \beta_2 = - \frac{1}{mg} \sqrt{2mE - p_x^2} = - \frac{p_{y_0}}{mg}.$$

Wynik naszego rachunku może być (po rozwikłaniu) przedstawiony w postaci:

$$z = z(x) = \frac{m^2 g}{2p_x^2} x \left( \frac{2p_x p_{y_0}}{m^2 g} - x \right) \quad (\text{paraboliczny tor punktu materialnego}),$$

$$z = z(t) = \frac{p_{y_0}}{m} t - \frac{gt^2}{2}, \quad x = x(t) = \frac{p_x}{m} t,$$



w której rozpoznajemy „szkolne” wzory służące do opisu rzutu ukośnego.

\*\*\*\*\*

Jeżeli za komplet stałych, występujących w rozwiązaniu równania Hamiltona-Jacobiego, przyjmujemy  $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, E$  (a więc wartość niezależnej od czasu funkcji Hamiltona przyjmujemy za jedną z tych stałych), to podział ról między równaniami

$$\frac{\partial \mathcal{S}(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, E, t)}{\partial \alpha_k} \equiv \frac{\partial W(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, E)}{\partial \alpha_k} = \beta_k \quad k = 1, \dots, s-1$$

oraz

$$\frac{\partial \mathcal{S}(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, E, t)}{\partial E} \equiv \frac{\partial W(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, E)}{\partial E} - t = \beta_s$$

jest następujący:

\* Pierwszych  $s-1$  równań nie zawiera czasu i wiąże ze sobą  $s$  współrzędnych  $q_1, \dots, q_s$ . Oznacza to, że równania te wyznaczają tor w przestrzeni konfiguracyjnej, na przykład w postaci

$$q_1 = q_1(q_s), \quad q_2 = q_2(q_s), \dots, \quad q_{s-1} = q_{s-1}(q_s).$$

\* Ostatnie równanie wiąże komplet zmiennych  $q_1, \dots, q_s$  z czasem  $t$ . Podstawiając do niego wszystkie związki  $q_k = q_k(q_s)$ ,  $k = 1, \dots, s-1$ , otrzymujemy równanie pozwalające obliczyć zależność  $q_s = q_s(t)$  a to z kolei pozwala na odtworzenie pozostałych funkcji  $q_k = q_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, s-1$ .

### ZADANIE 13.2

W rozdziale poświęconym równaniom Hamiltona rozwiązywaliśmy zadanie polegające na wyeliminowaniu czasu z opisu ewolucji układu fizycznego na rzecz jednej ze zmiennych konfiguracyjnych, która przejmuje jego rolę. Wskaż odpowiednią procedurę w ramach formalizmu Hamiltona-Jacobiego.

Rozwiązanie:

Prześledzimy proces redukcji czasu od początku. W przypadku ustalonej energii  $E$  równanie Hamiltona-Jacobiego

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = -H_{(t)} \left[ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \underline{q}}, \underline{q} \right]$$

(gdzie indeks  $(t)$  obok funkcji Hamiltona przypomina, że jest to funkcja odpowiadająca parametrowi ewolucji  $t$ ) zostaje zastąpione równaniem

$$E = H_{(t)} \left[ \frac{\partial W}{\partial \underline{q}}, \underline{q} \right], \quad W = S + Et$$

które zapiszemy w rozwiniętej postaci ze wskazaniem na tę zmienną  $q$ , która przejmie rolę parametru ewolucji (niech to będzie zmienna  $q_s$ , której nadamy oznaczenie  $\xi$ ) i na sprzężony z tą zmienną pęd kanoniczny  $p_s$ , któremu nadamy oznaczenie  $\pi$ :

$$E = H \left[ \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_{s-1}}, \frac{\partial W}{\partial \xi}, q_1, \dots, q_{s-1}, \xi \right].$$

Rozwikłujemy to równanie względem  $\pi$ , czyli względem  $\frac{\partial W}{\partial \xi}$ , otrzymując

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \pi \left[ \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_{s-1}}, q_1, \dots, q_{s-1}, \xi, E \right] = - \left\{ - \pi \left[ \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_{s-1}}, q_1, \dots, q_{s-1}, \xi, E \right] \right\}.$$

Wynika z tego, że zmienna  $-\pi$  przejęła rolę funkcji Hamiltona dla parametru ewolucji  $\xi$ . Ostatnie równanie jest więc równaniem Hamiltona-Jacobiego dla opisu zredukowanego

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = -H_{(\xi)} \left[ \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_{s-1}}, q_1, \dots, q_{s-1}, \xi, E \right].$$

Jeżeli nowa funkcja Hamiltona nie zależy jawnie od zmiennej  $\xi$  (a jest tak, jeżeli niezredukowana funkcja Hamiltona nie zależała od tej zmiennej), to mamy otwartą drogę do kolejnej redukcji.

\*\*\*\*\*

Rozważona przez nas rodzina transformacji kanonicznych składa się z transformacji będących złożeniem szczególnej transformacji, której funkcją tworzącą jest działanie  $S = S(\underline{q}, \underline{q}_0, t)$ , z dowolną, niezależną od czasu transformacją kanoniczną. Nowa funkcja Hamiltona jest w takim przypadku zawsze równa zero.

Ograniczymy się teraz do przypadków, w których wartość funkcji Hamiltona  $H$  jest całką ruchu, czyli takich, dla których zachodzi  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ . Rozważymy klasę transformacji kanonicznych, które - jak się zaraz przekonamy - również upraszczają opis ruchu, chociaż tego ruchu nie "zatrzymują", jak to było w przypadku tych wyżej opisanych. Transformacje te (jest ich również nieskończenie wiele) generowane są przez funkcje  $W(\underline{q}, \underline{\alpha})$ , z którymi spotkaliśmy się już rozwiązując równanie Hamiltona-Jacobiego, czyli przez funkcje występujące w rozkładzie

$$S(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t) = W(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s) - E(\alpha_1, \dots, \alpha_s)t.$$

Jak już wiemy, szczególnymi przypadkami takich funkcji są funkcje występujące we wzorach

$$S(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, E, t) = W(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, E) - Et,$$

gdzie rolę jednej ze stałych  $\alpha$  pełni stała wartość funkcji Hamiltona.

Pozostaniemy jednak teraz przy tym ogólniejszym ujęciu i zbadamy skutki wykonania transformacji kanonicznej, której funkcją tworzącą byłaby funkcja  $W(\underline{q}, \underline{\tilde{\alpha}})$ , gdzie wielkości  $\underline{\tilde{\alpha}}$  niech występują w roli nowych pędów<sup>19</sup>. Transformacja taka - w odróżnieniu od transformacji generowanej funkcją  $S(\underline{q}, \underline{\alpha}, t) = W(\underline{q}, \underline{\alpha}) - E(\underline{\alpha})t$  - nie zależy od czasu, w związku z czym nowa funkcja Hamiltona równa będzie starej funkcji z podstawieniem nowych zmiennych. Wielkości  $\underline{\tilde{\alpha}}$  to oczywiście „połowa” nowych zmiennych - na tym etapie rozumowania nie wiemy jeszcze, czy będą one stałe, ponieważ rozważamy teraz inną transformację kanoniczną, niż ta, dla której funkcją tworzącą była funkcja  $S(\underline{q}, \underline{\alpha}, t)$ . Reszta nowych zmiennych, to pochodne

$$\underline{\tilde{\beta}} = \frac{\partial W}{\partial \underline{\tilde{\alpha}}}.$$

O ich ew. zależności od czasu też jeszcze niczego nie wiemy.

Omawianie zależności współrzędnych  $(\underline{\tilde{\alpha}}, \underline{\tilde{\beta}})$  od czasu zaczniemy od współrzędnych „pędowych”  $\underline{\tilde{\alpha}}$ . W tym celu wrócimy do działania  $S(\underline{q}, \underline{\alpha}, t)$  i przypomnimy sobie związki

$$\frac{\partial S(\underline{q}, \underline{\alpha}, t)}{\partial \underline{q}} \equiv \frac{\partial W(\underline{q}, \underline{\alpha})}{\partial \underline{q}} = \underline{p}.$$

Założmy, że związki te można rozwikłać względem stałych  $\underline{\alpha}$ , otrzymując relacje

$$\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(\underline{p}(t), \underline{q}(t)),$$

które są zapisem stwierdzenia, że zmienne fazowe  $(\underline{p}, \underline{q})$  zależą od czasu w taki sposób, że wielkości  $\underline{\alpha}$  są stałe (czyli są dynamicznymi całkami ruchu). Zauważmy jednak, że wielkości  $\underline{\tilde{\alpha}}$  spełniają dokładnie te same relacje:

$$\frac{\partial W(\underline{q}, \underline{\tilde{\alpha}})}{\partial \underline{q}} = \underline{p},$$

---

<sup>19</sup> Tak więc funkcja tworząca  $W$  jest funkcją typu  $\Phi(\underline{q}, \underline{P})$ .

czyli

$$\tilde{\alpha}(\underline{p}, \underline{q}) = \underline{\alpha}(\underline{p}, \underline{q}) = \underline{\text{const}}_t.$$

Tak więc nowa transformacja kanoniczna, o funkcji tworzącej  $W(\underline{q}, \tilde{\alpha})$ , prowadzi do tych samych nowych zmiennych pędowych, co zależna od czasu transformacja o funkcji  $S(\underline{q}, \underline{\alpha}, t)$ .

Pozostają do zbadania zmienne  $\tilde{\beta}$ . W tym celu odwołamy się do funkcji Hamiltona po transformacji  $(\underline{p}, \underline{q}) \rightarrow (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ . Skoro transformacja nie zależy od czasu, to  $\tilde{H}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = H(\underline{p}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}), \underline{q}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}))$  a równania Hamiltona, zapisane w nowych zmiennych, prowadzą do następujących wniosków:

$$0 = \dot{\underline{\alpha}} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\beta}} \Rightarrow \tilde{H}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \tilde{H}(\tilde{\alpha}) \Rightarrow \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\alpha}} = \dot{\tilde{\beta}} = \underline{\text{const}}_t \equiv \underline{w}$$

$$\Rightarrow \tilde{\beta}_i(t) = w_i t + \delta_i \quad i = 1, \dots, s$$

Ruch w nowych zmiennych opisany jest więc pędami, które są całkami ruchu i współrzędnymi, które rosną liniowo z upływem czasu.

Szczególnymi przypadkami omawianych tu transformacji kanonicznych są transformacje generowane funkcjami  $W(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, E)$  (ten zapis, czyli oznaczenie  $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, E$  zamiast  $\tilde{\alpha}$ , jest uzasadniony na mocy powyższego stwierdzenia, że  $\underline{\alpha} = \tilde{\alpha}$ ). Nowa funkcja Hamiltona pokrywa się tu z jedną z nowych zmiennych pędowych, współrzędną konfiguracyjną, sprzężoną z tym pędem, jest czas (który istotnie „rośnie liniowo wraz z upływem czasu” z bezwymiarową „prędkością” równą jeden), pozostałe zmienne konfiguracyjne  $\beta$  nie zmieniają się z upływem czasu (odpowiadają im zerowe prędkości), bo dla  $i = 1, \dots, s-1$  mamy

$$\dot{\beta}_i = \frac{\partial E}{\partial \alpha_i} \Bigg|_{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{s-1}, E} = 0; \quad i = 1, \dots, s-1, \quad \beta_s = t + \delta$$

(tu i dalej porzuciliśmy zapis  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  na rzecz  $\alpha, \beta$ ).

#### XIV. WSPÓŁRZĘDNE KĄT-DZIAŁANIE (zastosowanie do rozwiązywania równań ruchu).

Szczególnym przypadkiem kompletu współrzędnych  $(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$  są tzw. współrzędne kątdziałanie.

Zanim je omówimy, pokażemy udogodnienia, które ujawniają się w przypadkach, w których równanie Hamiltona-Jacobiego separuje się względem wszystkich zmiennych  $\underline{q}$ .

Najprostszy przypadek separacji zmiennych zachodzi wtedy, gdy struktura funkcji Hamiltona pozwala napisać:  $H = H[f_1(q_1, p_1), \dots, f_s(q_s, p_s)]$ . Jak już wiemy, poszczególne funkcje  $f_i$  są wtedy całkami ruchu:

$$f_1(q_1, p_1) = \alpha_1, \dots, f_s(q_s, p_s) = \alpha_s.$$

W tej sytuacji jesteśmy upoważnieni do poszukiwania rozwiązania  $S(\underline{q}, \underline{\alpha})$  równania Hamiltona-Jacobiego w postaci

$$S(\underline{q}, \underline{\alpha}) = \sum_{i=1}^s W_i(q_i, \alpha_i) - E(\alpha_1, \dots, \alpha_s)t.$$

gdzie poszczególne składniki funkcji tworzącej  $S$  mogą być znalezione z równań

$$f_i\left(q_i, \frac{\partial W_i(q_i, \alpha_i)}{\partial q_i}\right) = \alpha_i.$$

Nie jest to jednak najbardziej ogólny przypadek umożliwiający całkowitą separację zmiennych. Gdyby funkcja Hamiltona miała na przykład strukturę

$$H = H[f_2(q_2, p_2, f_1(q_1, p_1)), f_3(q_3, p_3), \dots, f_s(q_s, p_s)],$$

to równanie wyznaczające funkcję  $W_1(q_1, \alpha_1)$  miałyby postać

$$f_1\left(q_1, \frac{\partial W_1(q_1, \alpha_1)}{\partial q_1}\right) = \alpha_1,$$

ale już dla funkcji  $W_2$  mielibyśmy równanie

$$f_2\left(q_2, \frac{\partial W_2(q_2, \alpha_1, \alpha_2)}{\partial q_2}, \alpha_1\right) = \alpha_2$$

Łatwo wyobrazić sobie inne, bardziej złożone struktury wewnątrz funkcji Hamiltona, które jednak pozwalają na dokonanie całkowitej separacji zmiennych. Aby więc nie zawęzić ogólności naszych rozważań przyjmiemy, że zbiór argumentów każdej funkcji  $W_i$  może zawierać (oprócz zmiennej  $q_i$ ) cały komplet stałych  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ .

Składniki  $W_i$  funkcji tworzącej są więc rozwiązaniami powyższych równań (poprzez zwykłe całkowania po pojedynczych zmiennych  $q_i$ ).

Mając obliczone funkcje  $W_i(q_i, \underline{\alpha})$ ,  $i = 1, \dots, s$ , możemy znaleźć ruch. W tym celu obliczamy funkcję  $W(\underline{q}, \underline{\alpha}) = \sum_i W_i(q_i, \underline{\alpha})$  i teraz:

$$\frac{\partial W(\underline{q}, \underline{\alpha})}{\partial \alpha_k} = \beta_k,$$

gdzie – jak już wiemy – zmienne  $\beta_k$  są liniowymi funkcjami czasu:  $\beta_k(t) = w_k t + \delta_k$  a współczynniki  $w_k$  obliczamy, znając zależność funkcji Hamiltona od stałych  $\underline{\alpha}$ <sup>20</sup>

$$\frac{\partial H(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} = \dot{\beta}_i = w_i.$$

Sytuacja, omówiona w tym zadaniu, jest oczywiście szczególnym przypadkiem opisanego wcześniej znajdowania ruchu za pomocą funkcji tworzącej  $W(\underline{q}, \underline{\alpha}) = S(\underline{q}, \underline{\alpha}, t) - E(\underline{\alpha})t$ . Pokazaliśmy tu tylko, jaką możliwość uproszczenia procedury mamy w przypadku separowalnej funkcji Hamiltona (uproszczenie w wyliczaniu funkcji  $W(\underline{q}, \underline{\alpha})$  polega na tym, że rachunek sprowadza się do wyliczania zwykłych całek po pojedynczych zmiennych  $q_i$ ).

\*\*\*\*\*

Współrzędne ką-działanie wprowadzamy dla takich, opisanych wyżej, separowalnych układów, w których pędy są okresowo zmienne a współrzędne przestrzenne ograniczone (ruchy drgające, krążenie planet itp.). Zmiennymi działania  $I_1, \dots, I_s$  nazywamy wartości całek

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i(q_i, \underline{\alpha}) dq_i,$$

wykonanych po takim zakresie zmiennej  $q_i$ , który odpowiada powrotowi zmiennej  $p_i$  do wartości wyjściowej. Całki te obliczamy, podstawiając do nich pędy wyrażone jako pochodne odpowiednich składników funkcji tworzącej:

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W_i(q_i, \underline{\alpha})}{\partial q_i} dq_i, \quad i = 1, \dots, s$$

w wyniku czego otrzymujemy związki

$$I_i = I_i(\underline{\alpha}), \quad i = 1, \dots, s,$$

---

<sup>20</sup> Zależność ta zostaje ustalona na samym wstępie, gdy stwierdzamy separowalność funkcji Hamiltona względem wszystkich zmiennych

które – za wyjątkiem szczególnych przypadków – mogą być rozwikłane do postaci

$$\alpha_i = \alpha_i(\underline{I}), \quad i = 1, \dots, s.$$

Wielkości  $\underline{I}$  są oczywiście stałe. Funkcja Hamiltona  $H(\underline{\alpha})$  może być wyrażona jako funkcja  $H(\underline{I})$ , a wielkości  $\underline{I}$  potraktowane jako pędy pewnego nowego zestawu zmiennych kanonicznych  $(\underline{I}, \underline{\varphi})$ .

#### ZADANIE 14.1

Rozważmy transformację zmiennych  $(\underline{p}, \underline{q}) \rightarrow (\underline{P}, \underline{Q})$ , która jest zadana w sposób niekompletny wzorami  $\underline{P} = \underline{P}(\underline{p})$ . Oczywiście brakuje związków  $\underline{Q} = \underline{Q}(\underline{p}, \underline{q})$ . Czy można dowolny zadany komplet różniczkowalnych związków  $\underline{P} = \underline{P}(\underline{p})$  tak uzupełnić odpowiednio dobranymi związkami  $\underline{Q} = \underline{Q}(\underline{p}, \underline{q})$ , aby uzyskać transformację kanoniczną?

Związek tego zadania z bieżącym wykładem jest jasny: chodzi o to, czy zawsze istnieje zestaw zmiennych  $\underline{\varphi}(t)$ , które wraz z zestawem nowych pędów  $\underline{I} = \underline{I}(\underline{\alpha})$  utworzą komplet zmiennych kanonicznych  $(\underline{I}, \underline{\varphi})$ .

Rozwiązanie:

Skonstruujemy funkcję tworzącą  $F(\underline{p}, \underline{Q})$  transformacji, której częścią są zadane związki  $\underline{P} = \underline{P}(\underline{p})$ . Musi zachodzić:

$$P_i = -\frac{\partial F(\underline{p}, \underline{Q})}{\partial Q_i} = P_i(\underline{p}).$$

Warunek ten spełnia funkcja  $F(\underline{p}, \underline{Q}) = -\sum_i P_i(\underline{p}) Q_i$ , a związki

$$q_k = -\frac{\partial F(\underline{p}, \underline{Q})}{\partial p_k} = \sum_i \frac{\partial P_i(\underline{p})}{\partial p_k} Q_i$$

uzupełniają naszą transformację do transformacji kanonicznej.

Wracamy do wykładu. Oczywiście pędy  $P_i$  z ostatniego zadania, to stałe  $I_i$ , współrzędne  $\underline{Q}$  utożsamiamy z  $\underline{\varphi}$ , współrzędne  $\underline{q}$  to liniowe funkcje  $\underline{\beta}(t)$ , a pędy  $\underline{p}$  to zestaw stałych  $\underline{\alpha}$ , czyli:

$$F(\underline{\alpha}, \underline{\varphi}) = -\sum_i I_i(\underline{\alpha})\varphi_i, \quad I_i(\underline{\alpha}) = \frac{\partial F}{\partial \varphi_i}, \quad \beta_k = -\frac{\partial F(\underline{\alpha}, \underline{\varphi})}{\partial \alpha_k} = \sum_i \frac{\partial I_i(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_k} \varphi_i$$

Widać stąd, że współrzędne  $\underline{\varphi}(t)$  będą kombinacjami liniowymi zależnych liniowo od czasu współrzędnych  $\underline{\beta}(t)$  (ze współczynnikami kombinacji, które można obliczyć, znając zestaw funkcji  $I_i(\underline{\alpha})$ ). Współrzędne  $\underline{\varphi}$  są zatem również liniowymi funkcjami czasu (pozostaje to w zgodzie z tym, że funkcja Hamiltona zależy tylko od stałych pędów  $\underline{I}$ ):

$$\varphi_i = \omega_i t + \varphi_{i0} \quad i = 1, \dots, s,$$

gdzie częstości kołowe  $\omega_i$ , równe  $\dot{\varphi}_i$ , obliczamy z równań Hamiltona

$$\omega_i = \dot{\varphi}_i = \frac{\partial H(\underline{I})}{\partial I_i}.$$

Prosty obraz ruchu, opisanego we współrzędnych ką-działanie  $(\underline{I}, \underline{\varphi})$ , trzeba jeszcze przełożyć na opis we współrzędnych wyjściowych  $(\underline{p}, \underline{q})$ . Procedura przejścia jest standardowa: związek między obydwoma zespołami zmiennych zapisany jest w funkcji tworzącej  $\tilde{W}(\underline{q}, \underline{I})$  transformacji wiążącej te dwa komplety zmiennych fazowych.

Aby odtworzyć tę funkcję, musimy wrócić do funkcji tworzącej  $W(\underline{q}, \underline{\alpha})$  transformacji  $(\underline{p}, \underline{q}) \rightarrow (\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ , od której zaczęliśmy drogę do zmiennych ką-działanie. Mieliśmy tam funkcję Hamiltona, pozwalającą na pełną separację zmiennych (trzeba wrócić do tamtych wzorów i przyrzeć się im). Po zidentyfikowaniu w funkcji Hamiltona kompletu całek ruchu, których wartości oznaczyliśmy symbolami  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ , napisaliśmy tam serię  $s$  oddzielnych wzorów pozwalających na obliczenie  $s$  składników  $W_i(q_i, \alpha_i)$  funkcji tworzącej  $W(\underline{q}, \underline{\alpha})$ .

Skorzystamy teraz z wyników ostatniego zadania. Ustaliliśmy tam, że funkcja tworząca  $F(\underline{p}, \underline{Q})$  transformacji kanonicznej prowadzącej od kompletu starych zmiennych  $(\underline{p}, \underline{q})$  do kompletu nowych zmiennych  $(\underline{P}, \underline{Q})$ , której częścią byłyby wzory  $\underline{P} = \underline{P}(\underline{p})$  może być wybrana w postaci:  $F(\underline{p}, \underline{Q}) = -\sum_i P_i(\underline{p})Q_i$ . W tekście zadania była zapowiedź, że wykorzystamy ten wynik do uzupełnienia transformacji zadanej „w połowie” wzorami  $\underline{I} = \underline{I}(\underline{\alpha})$ , czyli przejście  $(\underline{p}, \underline{q}) \rightarrow (\underline{P}, \underline{Q})$  będzie w naszym rozumowaniu oznaczało przejście  $(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \rightarrow (\underline{I}, \underline{\varphi})$ . Funkcja tworząca tego przejścia, która w zadaniu wystąpiła pod postacią  $F(\underline{p}, \underline{Q}) = -\sum_i P_i(\underline{p})Q_i$  przyjęła w zmiennych, które nas interesują, formę:  $W'(\underline{\alpha}, \underline{\varphi}) = -\sum_i I_i(\underline{\alpha})\varphi_i$ . Funkcja tworząca  $\tilde{W}(\underline{q}, \underline{I})$ , której szukamy, odpowiada za złożenie transformacji od wyjściowych zmiennych  $(\underline{p}, \underline{q})$  do zmiennych  $(\underline{I}, \underline{\varphi})$ . Musimy więc teraz znaleźć funkcję tworzącą transformacji powstającej w wyniku złożenia transformacji



$(\underline{p}, \underline{q}) \rightarrow (\underline{\alpha}, \underline{\beta})$  (realizuje ją funkcja tworząca  $W(\underline{q}, \underline{\alpha})$ ) z transformacją  $(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \rightarrow (\underline{I}, \underline{\varphi})$  (za nią z kolei odpowiada funkcja tworząca  $W'(\underline{\alpha}, \underline{\varphi}) = -\sum_i I_i(\underline{\alpha})\varphi_i$ ).

Zauważmy, że dla pierwszej transformacji kanonicznej  $(\underline{p}, \underline{q}) \rightarrow (\underline{\alpha}, \underline{\beta})$  dysponujemy funkcją tworzącą  $W(\underline{q}, \underline{\alpha})$  określoną w zmiennych {stare współrzędne  $\underline{q}$ , nowe pędy  $\underline{\alpha}$ }, dla drugiej zaś transformacji  $(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \rightarrow (\underline{I}, \underline{\varphi})$  znamy funkcję tworzącą  $W'(\underline{\alpha}, \underline{\varphi})$ , czyli zadaną w zmiennych {stare pędy  $\underline{\alpha}$ , nowe współrzędne  $\underline{\varphi}$ }. Dlatego musimy rozwiązać kolejne zadanie, w którym pokażemy, jak z tych funkcji tworzących „różnych typów” odtworzyć funkcję tworzącą  $\tilde{W}(\underline{q}, \underline{I})$  złożenia obydwu transformacji, określoną w zmiennych {stare współrzędne  $\underline{q}$ , nowe pędy  $\underline{I}$ }.

#### ZADANIE 14.2

Wykonano kolejno dwie transformacje kanoniczne:  $(\underline{p}, \underline{q}) \rightarrow (\underline{P}', \underline{Q}') \rightarrow (\underline{P}, \underline{Q})$ . Dla pierwszej znamy funkcję tworzącą  $F(\underline{q}, \underline{P}')$ , dla drugiej – funkcję  $F'(\underline{P}', \underline{Q}')$ , a szukamy funkcji tworzącej  $\tilde{F}(\underline{q}, \underline{P})$  realizującej złożenie obydwu transformacji.

Rozwiązanie:

Zachodzą związki:

$$\begin{aligned} \underline{p}d\underline{q} + \underline{Q}'d\underline{P}' &= dF(\underline{q}, \underline{P}') \\ -\underline{Q}'d\underline{P}' - \underline{P}d\underline{Q} &= dF'(\underline{P}', \underline{Q}') \end{aligned}$$

Dodając te związki stronami dostajemy  $\underline{p}d\underline{q} - \underline{P}d\underline{Q} = d(F + F')$ . Tak więc funkcja tworząca  $\Phi$  transformacji złożonej, wyrażona w zmiennych  $(\underline{q}, \underline{Q})$  byłaby sumą:  $\Phi = F + F'$ . Szukamy jednak funkcji tworzącej  $\tilde{F}(\underline{q}, \underline{P})$  tej transformacji, czyli w wersji zależnej od zmiennych  $(\underline{q}, \underline{P})$ . Związek między funkcjami  $\tilde{F}$  i  $\Phi$  jest jednak znany:

$$d\Phi(\underline{q}, \underline{Q}) = \underline{p}d\underline{q} - \underline{P}d\underline{Q} \quad (\text{dodajemy do obu stron różniczkę iloczynu } \underline{P}\underline{Q})$$

$$d(\Phi + \underline{P}\underline{Q}) = \underline{p}d\underline{q} + \underline{Q}d\underline{P} = d\tilde{F}(\underline{q}, \underline{P}), \quad \text{czyli} \quad \tilde{F} = \Phi + \underline{P}\underline{Q}$$

Ostatecznie więc poszukiwana funkcja tworząca to  $\tilde{F} = F + F' + \underline{P}\underline{Q}$ , wyrażona w zmiennych  $(\underline{q}, \underline{P})$ .

\*\*\*\*\*

Wracamy teraz do naszych poszukiwań ostatecznej funkcji  $\tilde{W}(\underline{q}, \underline{I})$ . Wynik ostatniego zadania pozwala napisać:

$$\tilde{W}(\underline{q}, \underline{I}) = W(\underline{q}, \underline{\alpha}) + W'(\underline{\alpha}, \underline{\varphi}) + \underline{I}\underline{\varphi} = W(\underline{q}, \underline{\alpha}) - \underline{I}\underline{\varphi} + \underline{I}\underline{\varphi} = W(\underline{q}, \underline{\alpha}) = W(\underline{q}, \underline{\alpha}(\underline{I}))$$

Tak więc szukana funkcja  $\tilde{W}(\underline{q}, \underline{I})$  jest równa funkcji tworzącej pierwszej transformacji kanonicznej  $W(\underline{q}, \underline{\alpha})$  z podstawieniem  $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(\underline{I})$ .

Wracamy do kompletu całek ruchu  $f_1, \dots, f_s$ , dla których zachodzą wzory

$$f_i \left( q_i, \frac{\partial W_i(q_i, \underline{\alpha})}{\partial q_i} \right) = \alpha_i$$

Możemy te wzory przepisać w postaci

$$f_i \left( q_i, \frac{\partial W_i(q_i, \underline{\alpha}(\underline{I}))}{\partial q_i} \right) = \alpha_i(\underline{I}), \quad \text{czyli} \quad f_i \left( q_i, \frac{\partial \tilde{W}_i(q_i, \underline{I})}{\partial q_i} \right) = \alpha_i(\underline{I})$$

Ostatnie związki, po rozwikłaniu i scałkowaniu, pozwalają na wyliczenie  $s$  funkcji  $\tilde{W}_i(q_i, \underline{I})$ . Mając funkcję tworzącą  $\tilde{W}(\underline{q}, \underline{I}) = \sum \tilde{W}_i(q_i, \underline{I})$  wypisujemy standardowe związki:

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial q_i} = \frac{\partial \tilde{W}_i(q_i, \underline{I})}{\partial q_i} = p_i \quad i = 1, \dots, s$$

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial I_i} = \sum_k \frac{\partial \tilde{W}_k}{\partial I_i} = \varphi_i.$$

Związki te – po rozwikłaniu – pozwalają na wyrażenie zmiennych  $(\underline{p}, \underline{q})$  przez zmienne  $(\underline{I}, \underline{\varphi})$ , których zależność od czasu już znamy.

### ZADANIE 14.3

Znajdź współrzędne ką-działanie dla jednowymiarowego oscylatora harmonicznego i tą metodą oblicz ruch.

Rozwiązanie:

(w ramach podano odpowiednie związki z poprzedzającego zadanie opracowania teoretycznego):

Mamy tu jeden stopień swobody, tak więc problemu separacji zmiennych nie ma, a cały Hamiltonian jest funkcją  $f(p, q)$  (por. oznaczenia w opracowaniu teoretycznym):

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}.$$

W roli związanej z tą funkcją jedynej stałej  $\alpha$  wystąpi oczywiście wartość energii  $E$ . Pozostaje znaleźć związek między tą stałą i współrzędną „działania”  $I$

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A p(q, E) dq.$$

Scałkowaliśmy tu po połowie okresu (wychylenie zmienia się od  $-A$  do  $+A$ ) i stąd  $\pi$  zamiast  $2\pi$ . Pęd  $p(q, E)$  związany jest z funkcją tworzącą  $W(q, E)$  zależnością

$$p(q, E) = \frac{\partial W(q, E)}{\partial q}.$$

Wartość tej pochodnej obliczmy ze wzoru

$$H\left(q, \frac{\partial W(q, E)}{\partial q}\right) = E,$$

$$f\left(q, \frac{\partial W(q, \alpha)}{\partial q}\right) = \alpha$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W(q, E)}{\partial q}\right)^2 + \frac{kq^2}{2} = E,$$

$$p(q, E) = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\left(E - \frac{kq^2}{2}\right)}.$$

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \sqrt{2m\left(E - \frac{kq^2}{2}\right)} dq = \left. \begin{array}{l} \text{kolejne podstawienia, to:} \\ \sqrt{\frac{k}{2E}} q = w, \quad w = \sin \rho. \\ \text{Wartość amplitudy } A \text{ wiążemy} \\ \text{z energią: } \frac{kA^2}{2} = E. \end{array} \right| = E \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Tak więc

$$I = E \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$I_i = I_i(\alpha), \quad i = 1, \dots, s$$

Do obliczenia współczynnika  $\omega$ , odpowiedzialnego za szybkość przyrastania współrzędnej „kątowej”  $\varphi = \omega t + \varphi_0$  kanonicznie związanej ze współrzędną „działania”  $I$ ,

musimy mieć funkcję Hamiltona wyrażoną przez  $I$ , bo – jak pamiętamy –  $\dot{\varphi} = \frac{\partial H(I)}{\partial I}$  (jak wiemy zmienna  $\varphi$  w Hamiltonianie nie wystąpi):

$$H(I) = E(I) = I\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Tak więc współczynnikiem  $\omega$  jest w tym przypadku zwykła częstość kołowa oscylatora  $\sqrt{\frac{k}{m}}$ .

W zmiennych kąta-działanie  $(I, \varphi)$  ruch opisany jest więc zależnościami:

$$I(t) = \frac{E}{\omega} = \text{const}, \quad \varphi(t) = \omega t + \varphi_0, \quad \text{gdzie} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

W dwuwymiarowej przestrzeni fazowej oczekujemy dwóch stałych wyznaczonych przez warunki początkowe i są nimi  $E$  oraz  $\varphi_0$ .

Powinniśmy teraz wrócić do „starych” współrzędnych  $(p, q)$ . Związki między kompletami współrzędnych fazowych generowane są przez funkcję tworzącą, czyli w naszym przypadku przez funkcję  $W(q, E) = \tilde{W}(q, I)$ . Po jej obliczeniu (zrobimy to niżej) skorzystamy ze standardowych związków:

$$p = \frac{\partial \tilde{W}(q, I)}{\partial q}, \quad \varphi = \frac{\partial \tilde{W}(q, I)}{\partial I}.$$

Funkcję tworzącą  $\tilde{W}(q, I)$  obliczamy, rozwiązując równanie różniczkowe:

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial W(q, E)}{\partial q} \right)^2 + \frac{kq^2}{2} = E.$$

$$f\left(q, \frac{\partial W(q, \alpha)}{\partial q}\right) = \alpha$$

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m \left( E - \frac{kq^2}{2} \right)},$$

$$W(q, E) = \int^q \sqrt{2m \left( E - \frac{k}{2} q'^2 \right)} dq' = \int^q \sqrt{2m \left( I\omega - \frac{k}{2} q'^2 \right)} dq' = \tilde{W}(q, I).$$

I teraz:

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0 = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial I} = \sqrt{\frac{m\omega}{2I}} \int^q \frac{dq'}{\sqrt{1 - \frac{k}{2I\omega} q'^2}} = \arcsin \sqrt{\frac{k}{2I\omega}} q.$$

Stąd po rozwikłaniu względem  $q$  :

$$q(t) = \sqrt{\frac{2I\omega}{k}} \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Dla kompletu:

$$p = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial q} = \sqrt{2m \left( I\omega - \frac{kq^2}{2} \right)},$$

czyli po podstawieniu funkcji  $q(t)$  :

$$p(t) = \sqrt{2mI\omega} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

W zasadzie można uznać, że zaprezentowana tu metoda rozwiązywania problemu jednowymiarowego oscylatora harmonicznego nie należy do najprostszych. Przykład oscylatora wystąpił jednak tylko w roli „królika doświadczalnego” i pozwolił na prześledzenie funkcjonowania procedur.

\*\*\*\*\*

Znaczenie współrzędnych ką-działanie ujawnia się w przypadkach, gdy podczas ruchu funkcja Hamiltona podlega powolnym zmianom sterowanym przez wolno zmienny parametr zewnętrzny  $\lambda$ . Podczas zachodzenia tych zmian energia nie jest oczywiście całką ruchu. **Nieziennikiem adiabaticznym** nazywamy taką funkcję energii i parametru zewnętrznego  $\lambda$ , która pozostaje stała pomimo zachodzących zmian. Dowodzi się, że współrzędne  $J$  są niezmiennikami adiabaticznymi.

## SPIS TREŚCI

|   |    |
|---|----|
| Wstęp.....                              | 1  |
| Zasady dynamiki Newtona.....            | 2  |
| Więzy i współrzędne uogólnione.....     | 3  |
| Równania Lagrange'a.....                | 8  |
| Zasada najmniejszego działania.....     | 21 |
| Pędy uogólnione.....                    | 25 |
| Równania Hamiltona.....                 | 26 |
| Twierdzenie Noether.....                | 29 |
| Przestrzeń fazowa.....                  | 33 |
| Uogólniona zasada wariacyjna.....       | 33 |
| Transformacje kanoniczne.....           | 42 |
| Ruch jako transformacja kanoniczna..... | 47 |
| Równanie Hamiltona-Jacobiego.....       | 49 |
| Współrzędne ką-działanie.....           | 61 |